Árvores de Segmentos

Tópicos Especiais em Algoritmos – Ciência da Computação

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

IFB – Instituto Federal de Brasília, Campus Taguatinga

Sumário

Sumário

Introdução

- Considere o seguinte problema, dado uma entrada $V[0, n-1]$ e indices i, j, determinar o índice k, $i \leq k \leq j$ tal que $V[k]$ seja o menor valor possível de V sobre o intervalo $[i, j]$.
- Em caso de empate, pegamos o k mais à esquerda possível.
- Consulta de mínimos sobre intervalos (**R**ange-**M**inimum-**Q**ueries ou RMQ).

RMQ

RMQ

- Entrada: $V[0, n-1]$ e índices i, j, $0 \leq i \leq j < n$;
- Saída: $\mathrm{RMQ}_V(i, j) = \min\{\arg\min\{V[k] | i \leq k \leq j\}\}$

Algoritmo Força-Bruta

- Imediatamente conseguimos elaborar um algoritmo força-bruta.
- Basta varrer o vetor $V[i, j]$.

Algoritmo Força-Bruta

Algorithm 1: BRUTE-FORCE-RMQ

Input: $V[0, n-1], i, j, 0 \leq i \leq j < n$

Output: $\mathrm{RMQ}_V(i, j)$

```
(k, min_k) ← (i, V[i])
for( l ← i + 1; l ≤ j; l + + )
    if( V[l] < min_k )
        (k, min_k) ← (l, V[l])
return k
```

Algoritmo Força-Bruta

- Análise de pior-caso: $\Theta(n)$.
- No pior caso, para responder uma consulta precisamos olhar para toda a entrada.
- Precisamos de um método mais eficiente.

Em Busca de um Método mais Eficiente

- **Alternativa:** Árvores de Segmentos.
- Complexidade de pior caso $\langle \Theta(n), \Theta(\lg n) \rangle$.
- Suporta atualização!

Sumário

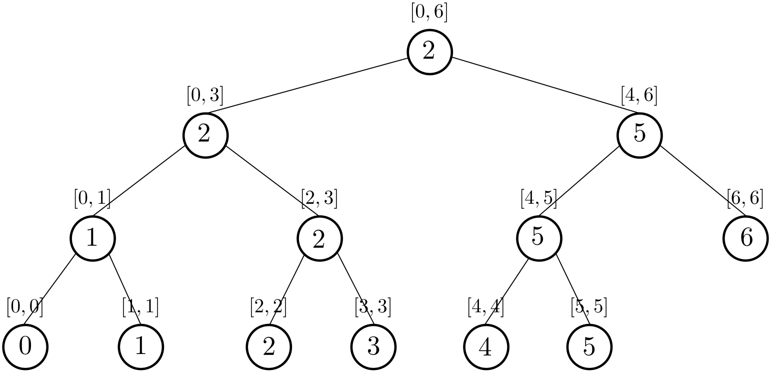
Árvore de Segmentos

- Em uma árvore de segmentos, cada nó está associado a um intervalo da sequência de entrada.
- Ao navegar na árvore, podemos responder consultas de RMQ em tempo eficiente.
- Estrutura hierárquica e de natureza recursiva!

Árvore de Segmentos

- Cada nó de uma árvore de segmentos está associado a um intervalo da sequência de entrada.
- A raiz armazena o valor de $\mathrm{RMQ}_V(0, n-1)$.
- A i-ésima folha está associada ao valor de $\mathrm{RMQ}_V(i, i)$.
- Um nó interno que esteja associado ao intervalo $[i, j]$ armazena o valor $\mathrm{RMQ}_V(i, j)$. Cada nó interno tem dois filhos:
  - Filho da esquerda, definido recursivamente sobre o intervalo $[i, \lfloor (i+j)/2 \rfloor]$.
  - Filho da direita, definido recursivamente sobre o intervalo $[\lfloor (i+j)/2 \rfloor + 1, j]$.

Árvore de Segmentos




```
     0  1  2  3  4  5  6
V = (18,17,12,20,16,12,21)
```

Sumário

Representação de Árvores de Segmentos

- Podemos simplificar a representação das árvores de segmentos através de vetores.
- Se a entrada V tem tamanho n, a árvore de segmentos terá tamanho máximo $2n - 1$, pois cada nó interno e a raiz possuem 2 filhos.
- Utilizaremos um vetor $T[0, 4n - 1]$, com $4n$ elementos. Para representar a árvore. $T[0]$ não será utilizado. Começamos de $T[1]$ para facilitar a navegação na árvore.

Representação de Árvores de Segmentos

- Com a representação do vetor, podemos navegar na árvore conceitual.
- Seja um nó no índice i do vetor:
  - Filho da esquerda: $2i$.
  - Filho da direita: $2i + 1$

Representação de Árvores de Segmentos

Algorithm 2: $\textsc{Left}(x)$

Input: x

Output: Filho da esquerda de x no vetor

return $2x$

Algorithm 3: $\textsc{Right}(x)$

Input: x

Output: Filho da direita de x no vetor

return $2x + 1$

Sumário

Construção

- Para construir a árvore de segmentos, podemos adotar o seguinte procedimento recursivo.
- Caso base: o nó x é uma folha que representa o intervalo $[i, i]$. Armazena-se i em x
- Caso geral: o nó x é um nó interno (ou raiz) sobre o intervalo $[i, j]$. Recursivamente calcula-se os valores para os filhos da direita e da esquerda e, dentre os dois valores, pegamos aquele que referencia o menor valor de mínimo e o armazenamos em x.

Construção

Algorithm 4: $\textsc{Build-ST}(V, x, i, j)$

Input: $V[0, n-1], x, i, j$

Output: $T[0, 4n-1]$

if($i = j$) $T[x] \leftarrow i$

else

  $\textsc{Build-ST}(V, \textsc{Left}(x), i, \lfloor (i+j)/2 \rfloor)$

  $\textsc{Build-ST}(V, \textsc{Right}(x), \lfloor (i+j)/2 \rfloor + 1, j)$

  $l = T[\textsc{Left}(x)]$

  $r = T[\textsc{Right}(x)]$

  if($V[l] \leq V[r]$)

    $T[x] = l$

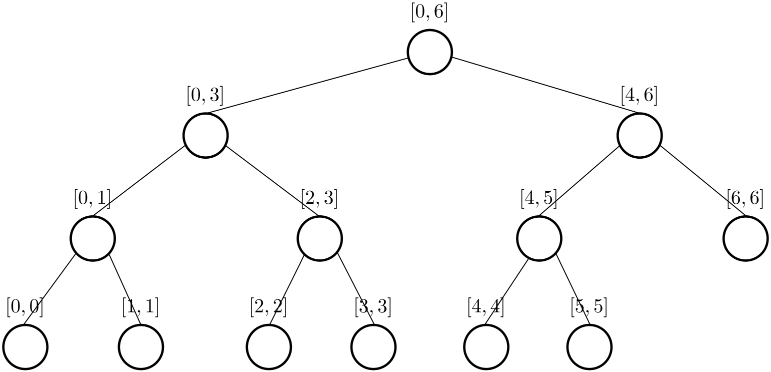
  else

    $T[x] = r$

Árvores de Segmentos: Consultas de RMQ

- Chamada inicial: BUILD-ST$(T, V, 1, 0, n-1)$.

Árvores de Segmentos: Construção




```
      0   1   2   3   4   5   6
V = (18,17,12,20,16,12,21)
```

Análise: Construção

- A árvore de segmentos pode ser construída em tempo $\Theta(n)$.
- A árvore possui $2n - 1$ nós e durante a construção e processamos cada nó exatamente 1 vez com tempo de processamento constante.

Sumário

Árvores de Segmentos: Consultas de RMQ

- Para responder consultas de RMQ, podemos navegar na árvore.
- Suponha um determinado nó x sobre um intervalo $[l, r]$. Queremos responder $\mathrm{RMQ}_V(i, j)$.
- Temos três casos:
  1. $[l, r] \cap [i, j] = \emptyset$: retorna-se indefinição, pois o nó não contribui para responder a consulta de mínimo.
  2. $[l, r] \subseteq [i, j]$: o intervalo do nó $[l, r]$ contribui parcialmente para a resposta de $\mathrm{RMQ}_V(i, j)$. Retornamos $T[x]$
  3. $[l, r] \cap [i, j] \neq \emptyset$: o nó em si não contribui para a resposta, mas os seus descendentes podem contribuir, procedemos recursivamente para os nós filhos.

Árvores de Segmentos: Consultas de RMQ

Algorithm 5: $\textsc{ST-RMQ}(T, V, x, l, r, i, j)$

Input: $T[0, 2n-1], V[0, n-1], x, l, r, i, j$

Output: $\mathrm{RMQ}_V(i, j)$

if($i > r \vee j < l$) **return** $\perp$

else if($l \geq i \wedge r \leq j$) **return** $T[x]$

$rmq_l \leftarrow \textsc{ST-RMQ}(T, V, \textsc{left}(x), l, \lfloor (l+r)/2 \rfloor, i, j)$

$rmq_r \leftarrow \textsc{ST-RMQ}(T, V, \textsc{right}(x), \lfloor (l+r)/2 \rfloor + 1, r, i, j)$

if($rmq_l = \perp$) **return** rmq_r

else if($rmq_r = \perp$) **return** rmq_l

if($V[rmq_l] \leq V[rmq_r]$)

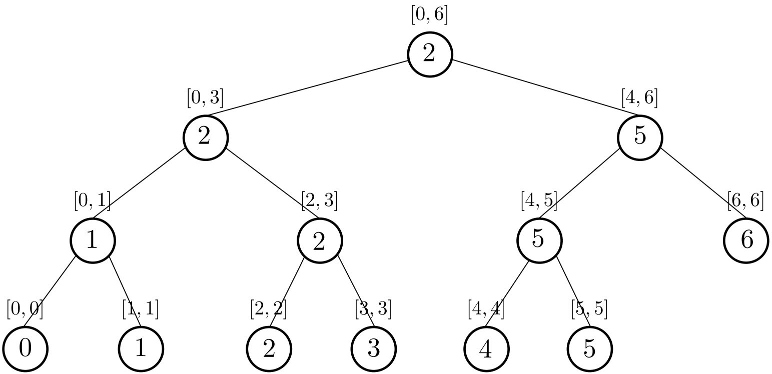
  return rmq_l

return rmq_r

Árvores de Segmentos: Consultas de RMQ

- Chamada inicial: $\textsc{st-rmq}(T, V, 1, 0, n-1, i, j)$.

Árvores de Segmentos: Consultas de RMQ




```
     0  1  2  3  4  5  6
V = (18,17,12,20,16,12,21)
```

Análise: Consultas de RMQ

- Durante a consulta sobre a árvore, visita-se no máximo 4 nós por nível.
- Como são $\Theta(\lg n)$ níveis, o tempo total da consulta é $\Theta(\lg n)$.

Análise: Consultas de RMQ

Teorema

No máximo 4 nós por nível são visitados durante a consulta de $\mathrm{RMQ}_V(i, j)$.

Análise: Consultas de RMQ

Demonstração.

A prova é por indução.

- Caso base: no primeiro nível apenas a raiz é acessada.
- Hipótese de Indução: no i-ésimo nível $n \leq 4$ nós são visitados.
- Passo de indução: precisamos mostrar que no $i+1$-ésimo nível $n \leq 4$ nós são acessados.

Análise: Consultas de RMQ

Demonstração.

Se no i-ésimo nível 1 ou 2 nós são visitados, teremos que no $i+1$-ésimo nível acessamos no máximo 4 nós. Só precisasmos nos preocupar no caso em que acessamos 3 ou 4 nós no i-ésimo nível.

Análise: Consultas de RMQ

Demonstração.

Se no i-ésimo nível 1 ou 2 nós são visitados, teremos que no $i+1$-ésimo nível acessamos no máximo 4 nós. Só precisasmos nos preocupar no caso em que acessamos 3 ou 4 nós no i-ésimo nível.

Suponha que visitemos $n = 4$ nós no i-ésimo nível, v_1, v_2, v_3, v_4. A união dos intervalos cobertos por estes representam um intervalo $[l, r] \supseteq [i, j]$.

Estes nós também estão dispostos consecutivamente na árvore, quando lidos da esquerda para a direita.

Análise: Consultas de RMQ

Demonstração.

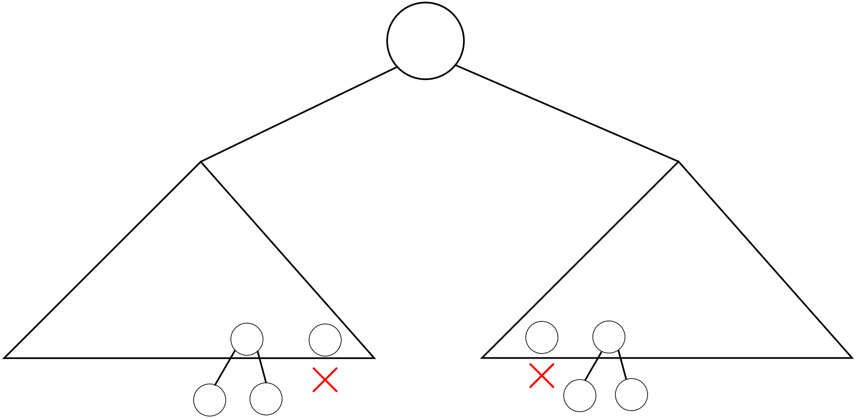
Podemos dizer que v_2 e v_3, os nós do meio, cobrem intervalos $[l', r'] \subset [i, j]$ e $[l'', r''] \subset [i, j]$ isto é, ambos os intervalos estão contidos em $[i, j]$. Mais do que isto, podemos dizer que $[l', r'] \cup [l'', r''] \subset [i, j]$. Caso contrário, a existência de v_1 e v_2 seria negada, uma vez que v_3 e v_4 já cobririam todo o intervalo $[l, r]$

Logo, os nós v_2 e v_3 não geram chamadas recursivas.

Conclui-se que apenas os nós v_1 e v_2 podem gerar, no máximo, 2 chamadas recursivas cada e portanto, no $i + 1$-ésimo nível, no máximo 4 nós são visitados.

Análise: Consultas de RMQ

Demonstração.



Análise: Consultas de RMQ

Demonstração.

A prova para $n = 3$ é análoga, mas no caso, apenas o nó v_2 não gera chamadas recursivas, enquanto v_1 e v_3 potencialmente geram duas chamadas recursivas cada. □

Sumário

Árvores de Segmentos: Atualização

- Supondo que um valor $V[k]$ seja atualizado, como propagar essa atualização na árvore de segmentos?
- Atualização *bottom-up*. Primeiro atualizamos a folha que corresponde ao intervalo $[k, k]$ e depois atualizamos os ancestrais desta folha na volta da recursão.
- Todos os nós do caminho da raiz até a folha afetada são (potencialmente) atualizados.

Árvores de Segmentos: Atualização

Algorithm 6: $\textsc{ST-Update}(T, V, x, l, r, k, value)$

Input: $T[0, 2n-1], V, x, l, r, k, value$

Output: T e V atualizados.

if($l = r$)

  $V[k] \leftarrow value$

  return

$mid \leftarrow \lfloor (l+r)/2 \rfloor$

if($k \leq mid$) $\textsc{ST-Update}(T, \textsc{Left}(x), l, mid, k, value)$

else $\textsc{ST-Update}(T, \textsc{Right}(x), mid+1, r, k, value)$

$value_l \leftarrow T[\textsc{Left}(x)]$

$value_r \leftarrow T[\textsc{Right}(x)]$

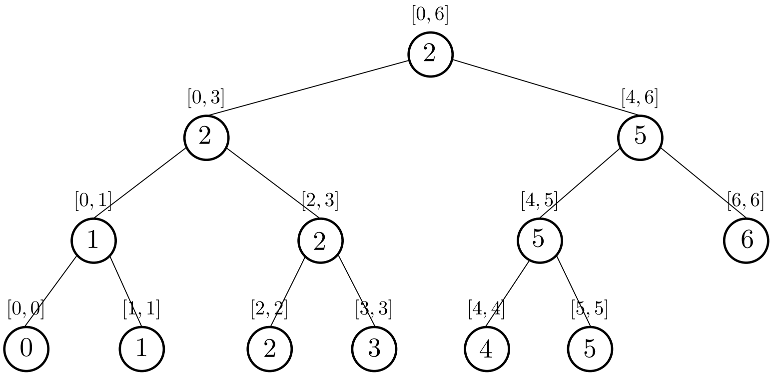
if($V[value_l] \leq V[value_r]$) $T[x] \leftarrow value_l$

else $T[x] \leftarrow value_r$

Árvore de Segmentos: Atualização

- Chamada inicial: $\textsc{st-update}(T, V, 1, 0, n-1, k, value)$.

Árvores de Segmentos: Atualização




```
    0  1  2  3  4  5  6
V = (18,17,12,20,16,12,21)
```

Análise: Atualização

- No máximo 1 nó em cada nível é atualizado.
- Temos $\Theta(\lg n)$ níveis.
- Tempo de atualização $\Theta(\lg n)$.

Sumário

Análise: Árvores de Segmentos

- Estrutura extremamente poderosa para responder $\mathrm{RMQ}_V(i,j)$ em tempo eficiente.
- Pode ser modificada para outros problemas que exigem outros tipos de consultas sobre intervalos. É uma estrutura bastante flexível.
- Tempo de construção: $\Theta(n)$.
- Tempo de consulta: $\Theta(\lg n)$.
- Tempo de atualização: $\Theta(\lg n)$.
- $\langle \Theta(n), \Theta(\lg n), \Theta(\lg n) \rangle$.