Árvores de Fenwick

Tópicos Especiais em Algoritmos – Ciência da Computação

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

IFB – Instituto Federal de Brasília, Campus Taguatinga

Sumário

Sumário

Introdução

- Problema: dada uma sequência $V[0, n-1]$ e índices $0 \leq i \leq j < n$, responder:

$$\sum_{k=i}^{j} V[k]$$

Algoritmo Força-Bruta

- Um algoritmo força-bruta apenas varre o vetor sobre o intervalo considerado e faz a soma.
- Pior caso: $\Theta(n)$ por consulta.

Algoritmo Força-Bruta

Algorithm 1: BRUTE-FORCE(V, i, j)

Input: $V[0, n-1], i, j, 0 \leq i \leq j < n$

Output: $\sum_{k=i}^{j} V[k]$

```
sum ← 0
for( k ← i; k ≤ j; k++ )
    sum += V[k]
return sum
```

Buscando Outra Estratégia

- É possível melhorar a nossa abordagem.
- Para simplificar: vamos supor que a nossa sequência está armazenada $V[1, n]$ agora e que $V[0] = 0$.
- Vamos computar uma soma de prefixos da seguinte forma:

$$C[i] = \sum_{k=0}^{i} V[k]$$

Buscando Outra Estratégia

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	0	1	3	2	5	2	8	7	3	0	4

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	0	1	4	6	11	13	21	28	31	31	35

Buscando Outra Estratégia

- Como responder $\sum_{k=i}^{j} V[k], \quad 1 \leq i \leq j \leq n$ utilizando C?
- Simples, como $C[i] = \sum_{k=1}^{i} V[i]$, então podemos calcular o somatório do intervalo $[i, j]$ da seguinte forma:

$$\sum_{k=i}^{j} = C[j] - C[i-1]$$

- $\Theta(1)$.

Soma de Prefixos

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	0	1	3	2	5	2	8	7	3	0	4

$$\sum_{i=3}^{7} V[i] = C[7] - C[2] = 28 - 4 = 24$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	0	1	4	6	11	13	21	28	31	31	35

Soma de Prefixos

- A computação de C pode ser feita em $\Theta(n)$ com uma simples varredura da esquerda para a direita em V.

Soma de Prefixos

Algorithm 2: PREFIX-SUM(V, C)

Input: $V[0, n]$,$V[0] = 0$

Output: $C[0, n]$

```
C[0] ← 0
for( i ← 1; i ≤ n; i++ )
    C[i] ← V[i] + C[i − 1]
```

Soma de Prefixos

- Com a soma de prefixos, podemos responder qualquer pergunta em tempo constante após calcular C.
- Tempo de pré-processamento: $\Theta(n)$.
- Tempo por consulta: $\Theta(1)$.
- $\langle \Theta(n), \Theta(1) \rangle$.

Soma de Prefixos

- A estratégia utilizando soma de prefixos é excelente!
- Mas existe um problema, só funciona no caso estático, em que V não muda.
- No caso dinâmico, temos que recomputar C a cada mudança.
- Levamos $\Theta(n)$ para atualizar C no pior caso.
- Precisamos de uma estrutura que funciona bem para o caso dinâmico.
- Alternativa: **Fenwick-Trees**. Tempo $\langle \Theta(n), \Theta(\lg n) \rangle$ permitindo atualizações em tempo $\Theta(\lg n)$.

Sumário

Fenwick Trees

- As Fenwick Trees foram propostas por Peter Fenwick na década de 90.
- São baseadas em um truque utilizando aritmética computacional e representação binária.
- Na prática conseguem responder as consultas de soma sobre intervalos de uma maneira bem rápida.
- Vamos definir o objeto de cálculo.

Fenwick Trees

- Seja $lsb(i)$ a posição do bit 1 menos significativo de i em sua representação binária.
  - $lsb(10) = lsb(1010_2) = 1$
  - $lsb(3) = lsb(11_2) = 0$
  - $lsb(16) = lsb(10000_2) = 4$
- A Fenwick Tree FT é um vetor $FT[0, n]$ em que

$$FT[i] = \sum_{k=i-2^{lsb(i)}+1}^{i} V[k]$$

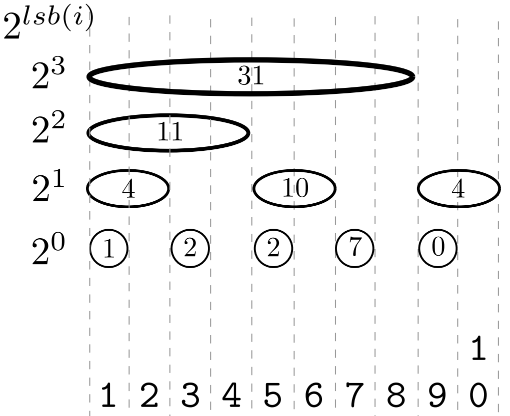
Fenwick Trees

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	0	1	3	2	5	2	8	7	3	0	4

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	0	1	4	6	11	13	21	28	31	31	35

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
FT	0	1	4	2	11	2	10	7	31	0	4
Intervalos		$[1,1]$	$[1,2]$	$[3,3]$	$[1,4]$	$[5,5]$	$[5,6]$	$[7,7]$	$[1,8]$	$[9,9]$	$[9,10]$

Fenwick Trees



`v = {1,3,2,5,2,8,7,3,0,4}`

Sumário

Construção de Fenwick Trees

- Para construir a Fenwick Tree, podemos utilizar o vetor C de soma de prefixos para computar cada intervalo considerado por cada nó.
- Como os inteiros normalmente estão representados em binário através do complemento de dois, o valor de $2^{lsb(i)}$ pode ser computado de uma maneira muito eficiente.

Construção de Fenwick Trees

- Tome $x = a1b$, em que a representa os bits mais significativos de x, 1 representa o bit 1 mais à direita de x, e b uma sequência de zeros ao final de x.
- Sabemos que, pela representação computacional usando complemento de dois, temos: $-x = \sim x + 1$.
- Como $\sim (x) = \sim (a1b) = (\sim a)0(\sim b)$, temos que $\sim (a1b) + 1 = (\sim a)1b$.
- Usando o operador de $\&$ bit a bit na expressão $(x \& -x)$ temos exatamente o valor de $2^{lsb(x)}$.

Construção das Fenwick Trees

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & a & 1 & b \\
 & \sim & a & 1 & b \\
\hline
\& & & & 00\ldots0100\ldots0 &
\end{array}
$$

Construção de Fenwick Trees

Algorithm 3: BUILD-FT

Input: $C[0, n]$

Output: $FT[0, n]$

$FT[0] \leftarrow 0$

for($i \leftarrow 1; i \leq n; i++$)

$\quad FT[i] \leftarrow C[i] - C[i - (i \& -i)]$

Fenwick Trees

Construção

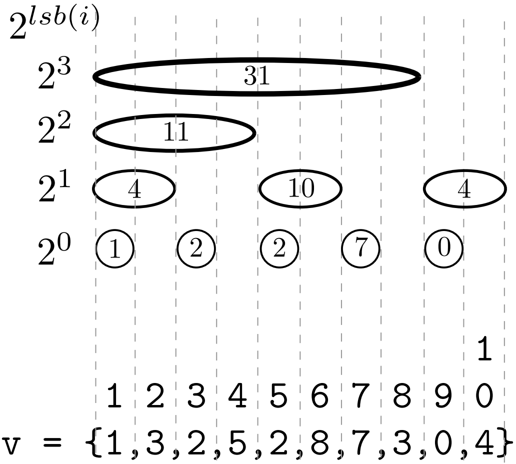
- A Fenwick Tree pode ser construída a partir da soma de prefixos C em tempo $\Theta(n)$, uma vez que a soma sobre cada intervalo é respondida em tempo $\Theta(1)$.

Sumário

Consultas sobre Fenwick Trees

- Mostraremos agora como utilizar a Fenwick Tree para responder a consulta de soma sobre o intervalo $V[1, i]$ para algum $1 \leq i \leq n$.
- O nó $FT[i]$ contém a informação da soma de $V[i - 2^{lsb(i)} + 1, i]$.
- Seja $i' = i - 2^{lsb(i)}$. Recursivamente podemos conseguir mais um pedaço da informação de $V[1, i]$ olhando para $FT[i']$, que possui o valor da soma de $V[i' - 2^{lsb(i')} + 1, i']$.
- Caso base: $i' = 0$.

Fenwick Trees



Construção de Fenwick Trees

Algorithm 4: SUM

Input: $FT[0, n], i$

Output: $\sum_{k=1}^{i} V[k]$

$sum \leftarrow 0$

while $i > 0$ **do**

  $sum += FT[i]$

  $i -= (i \& -i)$

return sum

Consultas sobre Fenwick Trees

- Utilizando a mesma ideia da soma de prefixos, é possível utilizar a Fenwick Tree para responder uma soma sobre um intervalo $V[i, j]$.
- Basta considerar subtração das somas sobre $V[1, j]$ e $V[1, i-1]$.

Consultas de Fenwick Trees

Algorithm 5: SUM

Input: $FT[0, n], i, j$

Output: $\sum_{k=i}^{j} V[k]$

return $FT.\textsc{sum}(j) - FT.\textsc{sum}(i - 1)$

Consultas de Fenwick Trees

- O tempo para cada consulta sobre uma Fenwick Tree é $\Theta(\lg n)$.
- Cada operação $i- = (i\& - i)$ efetivamente escreve 0 no bit menos significativo com valor 1 de i.
- Como gastamos w bits para representar um inteiro a cota está justificada, pois $w \in \Theta(\lg n)$. (Modelo RAM)

Sumário

Atualização de Valores

- Até o momento não ganhamos nada com as Fenwick Trees.
- Utilizar soma de prefixos para responder uma consulta leva tempo $\Theta(1)$ contra $\Theta(\lg n)$ da Fenwick Tree.
- A grande utilidade das Fenwick Trees é a habilidade de poder atualizar valores em tempo $\Theta(\lg n)$.

Atualização de Valores

- Suponha que queremos atualizar $V[i]$.
- As mudanças devem ser propagadas nos nós da Fenwick Tree.
- Sabemos que um nó $FT[j]$ da Fenwick Tree cobre o intervalo $[j - 2^{lsb(j)} + 1, j]$. Temos que atualizar todos os nós $FT[j]$ cujo intervalo contém i. Em outras palavras, atualizamos $FT[j]$ sempre que $j - 2^{lsb(j)} + 1 \leq i \leq j$.
- Processo simétrico ao da soma, mas incrementamos i de $2^{lsb(i)} = (i\& - i)$ unidades.

Atualização de Valores

Algorithm 6: UPDATE

Input: $FT[0, n], i, \Delta$

```
while i ≤ n do
    FT[i] += Δ
    i += (i & -i)
```

Atualização de valores

- As atualizações podem ser feitas em tempo $\Theta(\lg n)$.

Sumário

Análise das Fenwick Trees

- As Fenwick Trees são uma excelente opção para responder a consulta de soma sobre intervalos em tempo $\langle \Theta(n), \Theta(\lg n) \rangle$.
- Estrutura dinâmica, suporta atualização em tempo $\Theta(\lg n)$.
- Implementação extremamente enxuta e elegante baseada em aritmética computacional.
- Muito rápida na prática.