

Conceitos preliminares

Teoria dos Grafos

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes



**INSTITUTO
FEDERAL**

Brasília

Campus
Taguatinga

Sumário

Introdução

Conceitos

Representação

Introdução

- ▶ Para poder falar de algoritmos e aplicações de Grafos, primeiramente precisamos defini-los formalmente.
- ▶ Também precisamos explicar como representá-los computacionalmente.
- ▶ Assim teremos como realizar uma descrição precisa dos algoritmos que atuam sobre eles e da sua complexidade computacional.

Sumário

Introdução

Conceitos

Representação

Sumário

Conceitos

Definições básicas

Passeio, trilha, caminho, ciclo e circuito

Conectividade

Árvores

Grafos especiais

Conceitos: grafos

Definição (Grafo)

Um grafo não-direcionado, ou simplesmente, grafo, é uma dupla $G = (V, E)$ em que V é o conjunto de vértices e $E \subseteq [V^2]$ é o conjunto de arestas, em que

$$[V^2] = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$$

Isto é, o conjunto de arestas corresponde a um conjunto de pares não-ordenados e distintos de vértices. Cada aresta $e \in E$ é representada por um par $e = \{u, v\}$, em que $u, v \in V$ são os vértices adjacentes a e .

Conceitos: grafos

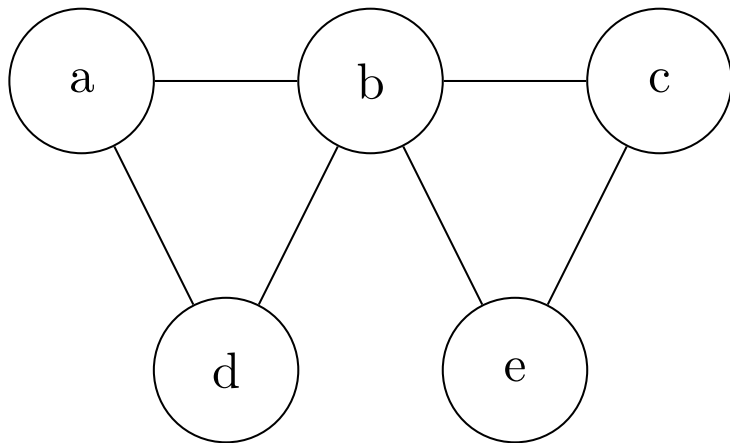
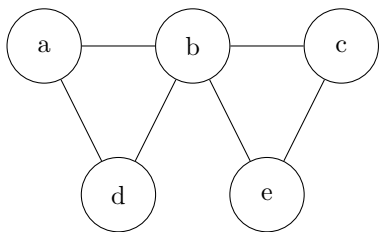


Figura: Exemplo de grafo não-direcionado.

Conceitos: grafos



► $V = \{a, b, c, d, e\}.$

► $E =$
 $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, e\}\}.$

- ▶ Se existe uma aresta $\{u, v\}$, isso significa que u e v se relacionam.
- ▶ Apesar de existirem definições alternativas de grafos que podem apresentar loops, ou múltiplas arestas entre pares de vértices, não as usaremos aqui.

Conceitos: grafos direcionados

Definição (Grafo direcionado)

Um grafo direcionado, ou dígrafo, é uma dupla $G = (V, A)$ em que V é o conjunto de vértices e $A \subseteq \{(u, v) : u, v \in V, u \neq v\}$ é o conjunto de arcos, em que cada arco $a \in A$ é representado por um par ordenado $a = (u, v)$ de vértices distintos, em que $u, v \in V$ são os vértices adjacentes a a , sendo u a origem e v o destino do arco.

Conceitos: grafos direcionados

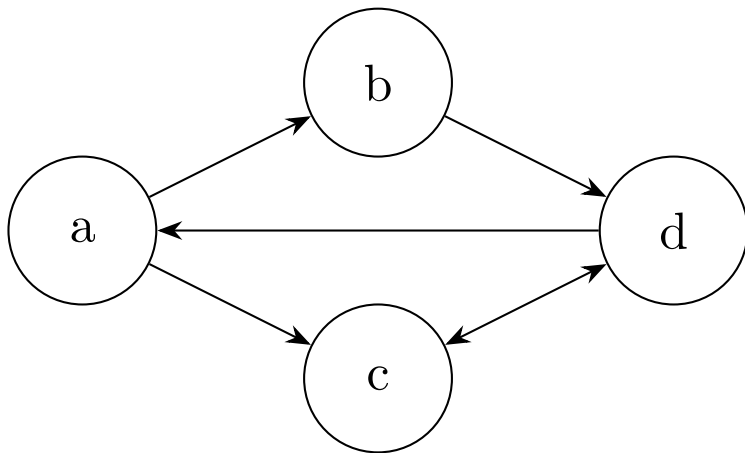
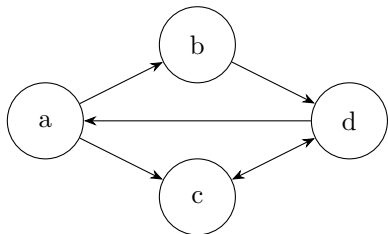


Figura: Grafo direcionado.

Conceitos: grafos direcionados



► $V = \{a, b, c, d\}$

► $A =$
 $\{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d), (d, c), (d, a)\}$

Conceitos: grafos direcionados

- ▶ Em grafos direcionados, a orientação das arestas importa.
- ▶ Se houver uma aresta (u, v) , mas não uma aresta (v, u) , isso implica que u se relaciona com v , mas v não se relaciona com u .

Conceitos: grafos direcionados

- ▶ Apesar de existirem definições alternativas de grafos que podem apresentar loops, ou múltiplos arcos, não as usaremos aqui.

Conceitos: grafos direcionados

Definição (Cabeça e Cauda)

Em uma aresta (u, v) de um grafo direcionado, u é chamada de cauda e v de cabeça. Dizemos que u incide em v .

Conceitos: tamanho e ordem

Definição (Tamanho e ordem)

O tamanho de um grafo, denotado por m , corresponde ao número de arestas dele. Já a ordem de um grafo, denotada por n , corresponde ao número de vértices.

$$m = |E|$$

$$n = |V|$$

Conceitos: grau

Definição (grau)

O grau de um nó u em um grafo $G = (V, E)$, denotado por $\deg(u)$ é a quantidade de arestas que incidem nele. Em outras palavras:

$$\deg(u) = | \{ \{u, v\} \in E \} |$$

Para grafos direcionados $G = (V, A)$, $\deg^-(u)$ representa o número de arcos que possuem u como cabeça, e $\deg^+(u)$, o número de arcos que possuem u como cauda. Isto é:

$$\deg^-(u) = | \{ (v, u) \in A \} |$$

$$\deg^+(u) = | \{ (u, v) \in A \} |$$

Conceitos: grau

Observação (Somatório dos graus)

É fácil ver que em um grafo direcionado $G = (V, A)$, temos:

$$\sum_{u \in V} \deg^-(u) = \sum_{u \in V} \deg^+(u) = m$$

Conceitos: subgrafo

Definição (Subgrafo e subgrafo gerador)

Seja $G = (V, E)$ um grafo. $G' = (V', E')$ é dito subgrafo de G se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

*Um subgrafo é chamado de **gerador** se $V' = V$ e $E' \subseteq E$.*

A definição de subgrafo e subgrafo gerador para grafos direcionados é análoga.

Sumário

Conceitos

Definições básicas

Passeio, trilha, caminho, ciclo e circuito

Conectividade

Árvores

Grafos especiais

Conceitos: passeio

Definição (Passeio)

Um *passeio* em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência de vértices e arestas $\langle v_1, a_1, v_2, \dots, a_{r-1}, v_r \rangle$ tal que $a_k = \{v_k, v_{k+1}\} \in E$ para todo $1 \leq k \leq r - 1$.

Na versão direcionada, $(v_k, v_{k+1}) \in A$ para todo $1 \leq k \leq r - 1$.

Como notação, podemos omitir as arestas e escrever apenas a sequência de vértices $\langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle$.

Exemplo: passeio

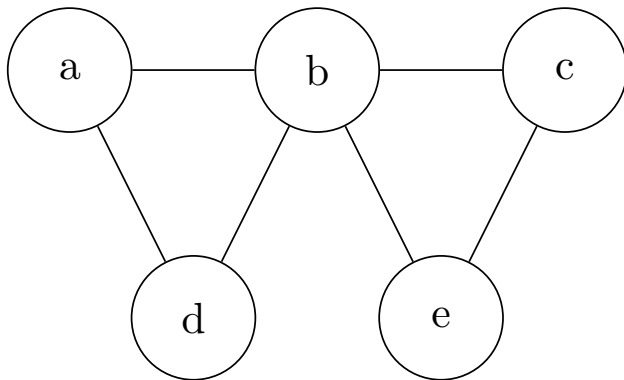


Figura: $\langle a, \{a, b\}, b, \{b, c\}, c, \{c, e\}, e, \{e, b\}, b, \{b, a\}, a \rangle$ é um passeio no grafo, também representado por $\langle a, b, c, e, b, a \rangle$.

Conceitos: trilha

Definição (Trilha)

Uma *trilha* em um grafo $G = (V, E)$ é um passeio no qual todas as arestas são distintas.

A versão direcionada é análoga.

Exemplo: trilha

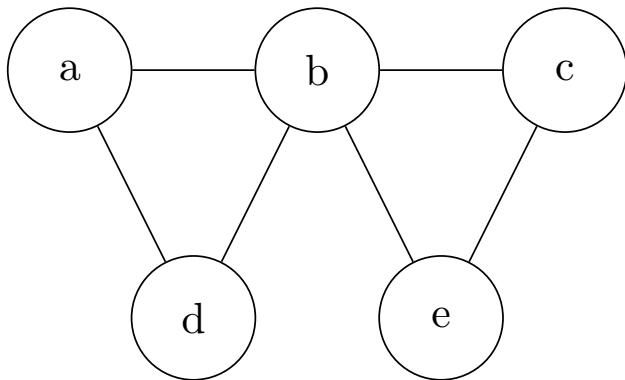


Figura: $\langle a, b, c, e, b \rangle$ é uma trilha.

Conceitos: caminho

Definição (Caminho)

Um *caminho* é uma trilha na qual todos os vértices, e conseqüentemente, todas as arestas, são distintos.

A versão direcionada é análoga.

Um caminho em que o primeiro vértice é u e o último vértice é v é denotado por $u \rightsquigarrow v$.

Exemplo: caminho

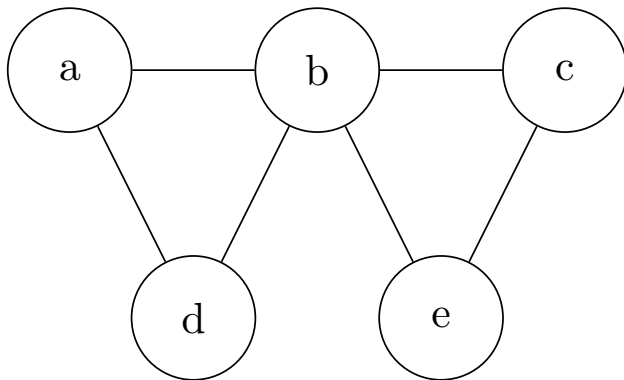


Figura: $\langle a, b, c, e \rangle$ é um caminho.

Conceitos: circuito

Definição (Circuito)

Um *circuito* é uma trilha não vazia na qual o primeiro e o último vértice são iguais.

Exemplo: circuito

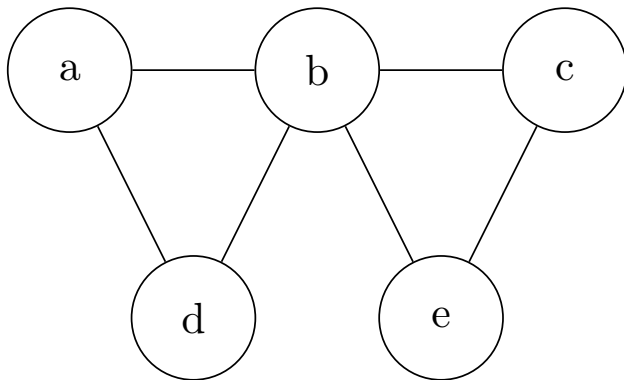


Figura: $\langle a, d, b, e, c, b, a \rangle$ é um circuito.

Conceitos: ciclo

Definição (Ciclo)

*Um **ciclo** é um circuito no qual todos os vértices são distintos, com exceção do primeiro e do último.*

Exemplo: ciclo

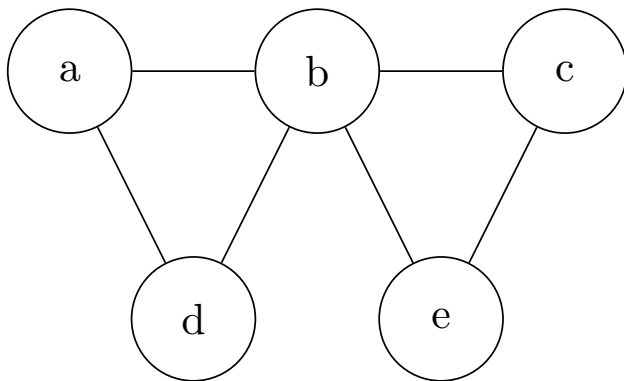


Figura: $\langle a, d, b, a \rangle$ é um ciclo.

Conceitos: grafo acíclico

Definição (Grafo acíclico)

*Um grafo é dito **acíclico** se não possui ciclos. A versão direcionada é análoga.*

Conceitos: grafo acíclico

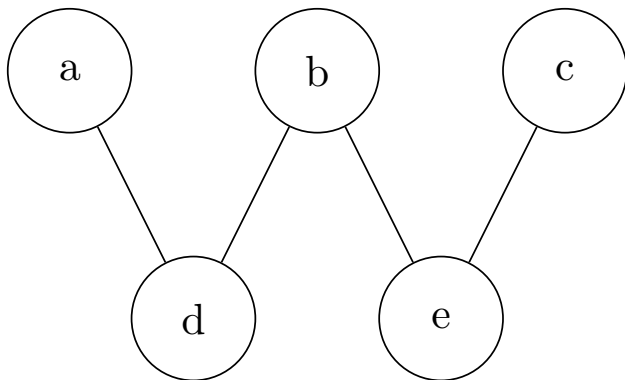


Figura: Grafo acíclico.

Sumário

Conceitos

Definições básicas

Passeio, trilha, caminho, ciclo e circuito

Conectividade

Árvores

Grafos especiais

Conceitos: conectividade

Definição (Conectividade)

Um grafo não-direcionado $G = (V, E)$ é dito conexo se, para qualquer par de vértices u e v , existe um caminho $u \rightsquigarrow v$.

Exemplo: conectividade

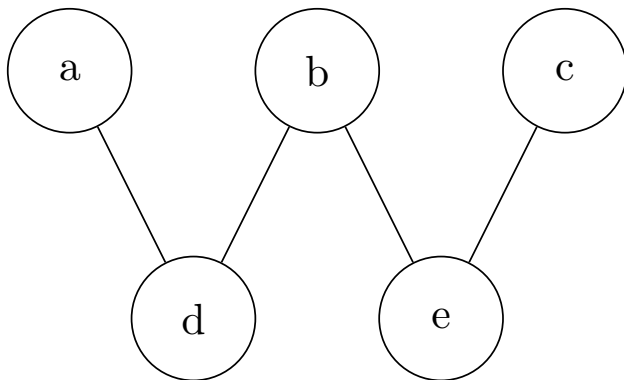


Figura: O grafo é conexo, pois existe um caminho entre qualquer par de vértices.

Exemplo: conectividade

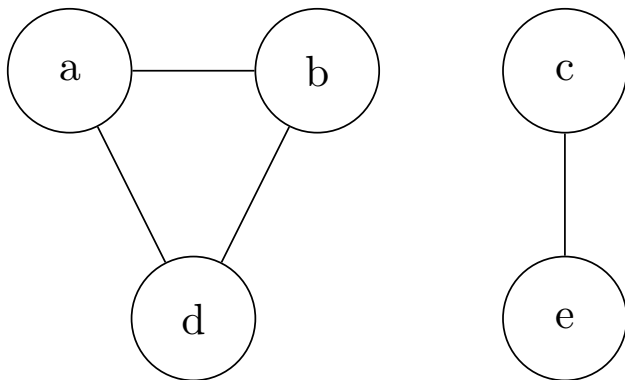


Figura: O grafo não é conexo, pois não existe caminho $a \rightsquigarrow e$.

Conceitos: conectividade fraca

Definição (Conectividade fraca)

*Um grafo direcionado $G = (V, A)$ é dito **fracamente conexo** se sua versão não direcionada é conexa.*

Exemplo: conectividade fraca

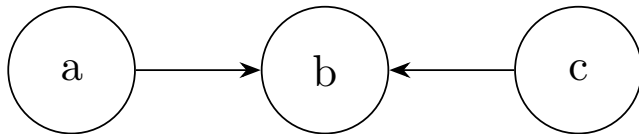


Figura: O grafo é fracamente conexo, pois sua versão não direcionada é conexa.

Conceitos: semiconexão

Definição (Semiconexão)

Um grafo direcionado $G = (V, A)$ é dito *semiconectado* se, para qualquer par de vértices u e v , existe um caminho direcionado $u \rightsquigarrow v$ **ou** $v \rightsquigarrow u$.

Exemplo: semiconexão

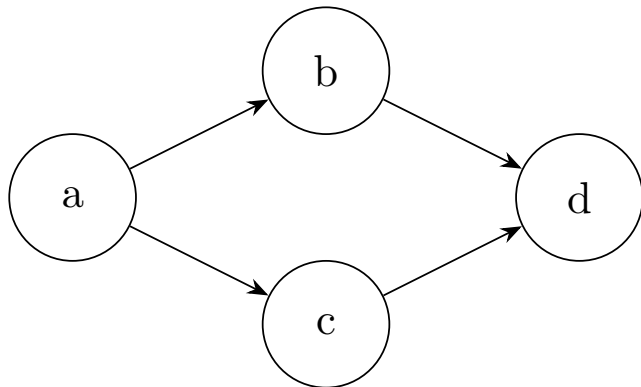


Figura: O grafo é semiconectado, pois existe caminho $u \rightsquigarrow v$ ou $v \rightsquigarrow u$ para qualquer par de vértices u e v .

Exemplo: semiconexão

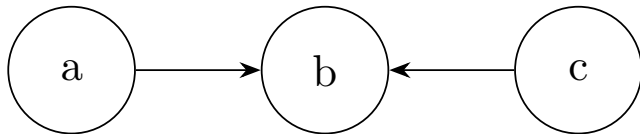


Figura: O grafo não é semiconectado, pois não existe caminho $c \rightsquigarrow a$ nem $a \rightsquigarrow c$.

Conceitos: conectividade forte

Definição (Conectividade forte)

*Um grafo direcionado $G = (V, A)$ é dito **fortemente conexo** se, para qualquer par de vértices u e v , existe um caminho direcionado $u \rightsquigarrow v$ e existe um caminho direcionado $v \rightsquigarrow u$.*

Exemplo: conectividade forte

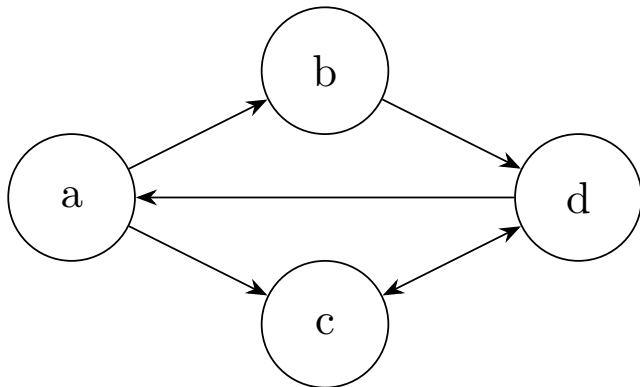


Figura: O grafo é fortemente conexo, pois existe caminho $u \rightsquigarrow v$ e $v \rightsquigarrow u$ para qualquer par de vértices u e v .

Conceitos: componentes conexas

Definição (Componentes conexas)

Uma componente conexa $G' = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um subgrafo maximal conexo.

Equivalentemente, G é dito conectado se possui apenas uma componente conexa.

Exemplo: componentes conexas

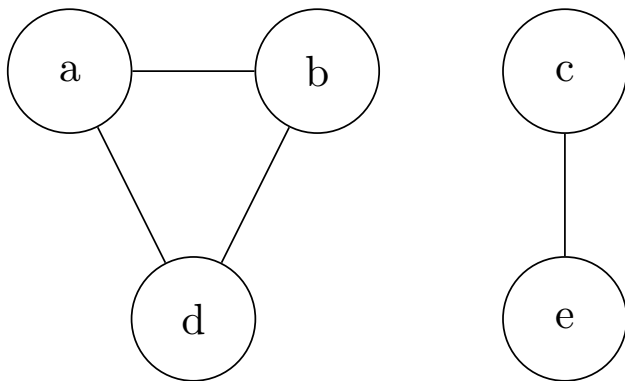


Figura: O grafo possui duas componentes conexas com os vértices $\{a, b, d\}$ e $\{c, e\}$.

Conceitos: componentes fortemente conexas

Definição (Componentes fortemente conexas)

Uma componente fortemente conexa $G' = (V', A')$ de um grafo direcionado $G = (V, A)$ é um subgrafo maximal fortemente conexo.

Equivalentemente, G é dito fortemente conexo se possui apenas uma componente fortemente conexa.

Exemplo: componentes fortemente conexas

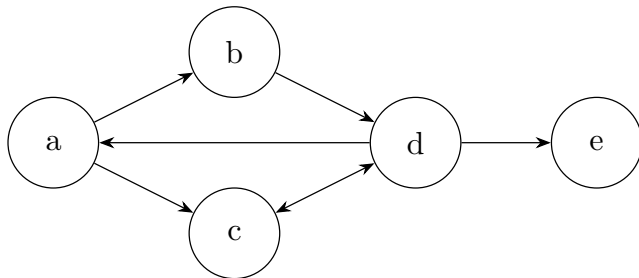


Figura: O grafo possui duas componentes fortemente conexas com os vértices $\{a, b, c, d\}$ e $\{e\}$.

Conceitos: vértice de articulação

Definição (Vértice de articulação)

Um *vértice de articulação* em um grafo $G = (V, E)$ é um vértice cuja remoção aumenta o número de componentes conexas de G .

Exemplo: vértice de articulação

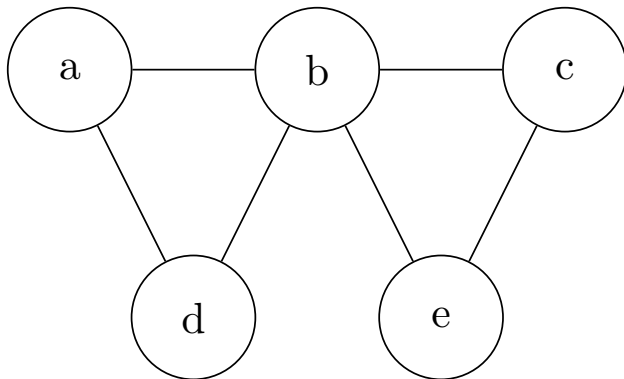


Figura: O vértice b é um vértice de articulação, pois sua remoção aumenta o número de componentes conexas do grafo.

Conceitos: ponte

Definição (Ponte)

*Uma aresta $e \in E$ em um grafo $G = (V, E)$ é uma **ponte** se a remoção de e aumenta o número de componentes conexas de G .*

Exemplo: ponte

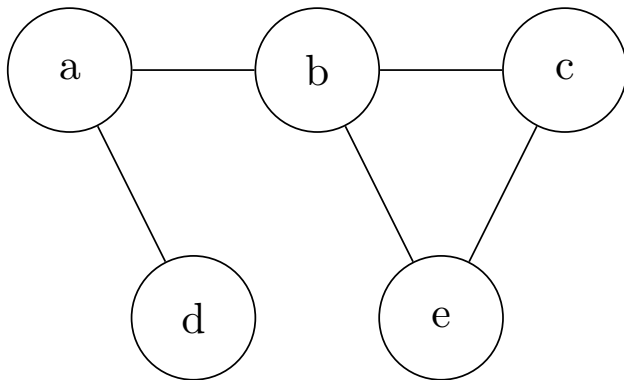


Figura: A aresta $\{a, b\}$ é uma ponte, pois sua remoção aumenta o número de componentes conexas do grafo. $\{a, d\}$ também é uma ponte.

Sumário

Conceitos

Definições básicas

Passeio, trilha, caminho, ciclo e circuito

Conectividade

Árvores

Grafos especiais

Conceitos: árvore

Definição (Árvore)

Uma árvore é um grafo não-direcionado conexo e acíclico.

Uma árvore direcionada é um grafo direcionado conexo e acíclico cuja versão não direcionada é uma árvore.

Exemplo: árvore

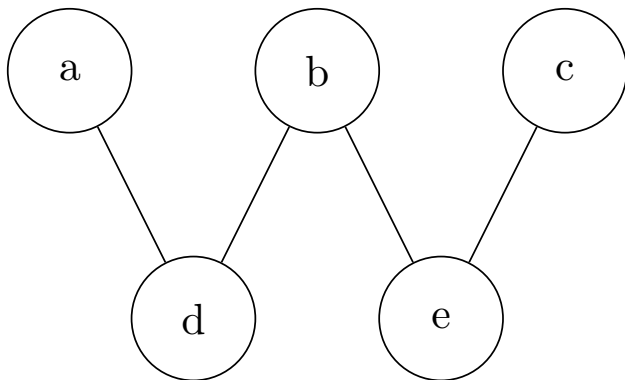


Figura: O grafo é uma árvore.

Conceitos: folha

Definição (Folha)

Uma folha em uma árvore é um vértice de grau 1.

Conceitos: árvores

Propriedades sobre árvores

- ▶ Uma árvore com n vértices possui exatamente $n - 1$ arestas.
- ▶ Uma árvore com $n \geq 2$ possui pelo menos duas folhas.
- ▶ Para qualquer par de vértices u e v em uma árvore, existe um único caminho $u \rightsquigarrow v$.
- ▶ Se uma aresta for adicionada a uma árvore, um ciclo será formado.
- ▶ Se uma aresta for removida de uma árvore, ela se tornará desconexa.

Conceitos: árvores

Raiz

Uma árvore enraizada é uma árvore na qual um vértice foi escolhido como raiz. A partir da raiz, todos os outros vértices podem ser organizados em níveis, de acordo com a distância em relação à raiz.

Exemplo: árvore enraizada

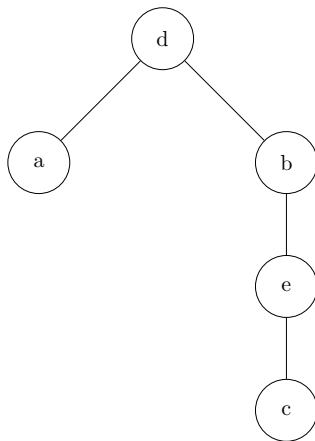


Figura: Árvore com raiz em d .

Conceitos: florestas

Definição (Floresta)

Uma floresta é um grafo $G = (V, E)$ em que cada componente conexa é uma árvore.

Exemplo: floresta

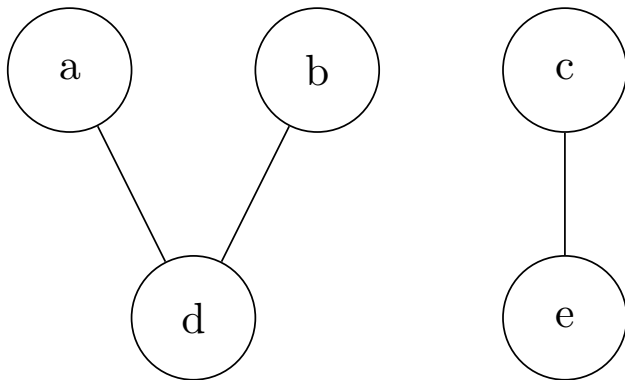


Figura: Uma floresta contendo duas árvores. A primeira possui os vértices $\{a, d, b\}$ enquanto a segunda, os vértices $\{c, e\}$.

Conceitos: árvores geradoras

Definição (Árvore geradora)

Uma árvore geradora de um grafo $G = (V, E)$ é um subgrafo $T = (V, E')$ que é uma árvore e que contém todos os vértices de G .

Sumário

Conceitos

Definições básicas

Passeio, trilha, caminho, ciclo e circuito

Conectividade

Árvores

Grafos especiais

Conceitos: grafo bipartido

Definição (Grafo bipartido)

*Um grafo $G = (V, E)$ é dito **bipartido** se V puder ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 de tal forma que cada aresta em E conecta um vértice em V_1 a um vértice em V_2 . Em outras palavras, não existem arestas entre vértices do mesmo conjunto.*

Como se trata de uma partição, $V_1 \cup V_2 = V$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

O grafo bipartido com o número máximo de arestas é chamado de grafo bipartido completo, e é denotado por $K_{x,y}$, em que $x = |V_1|$ e $y = |V_2|$.

Exemplo: grafo bipartido

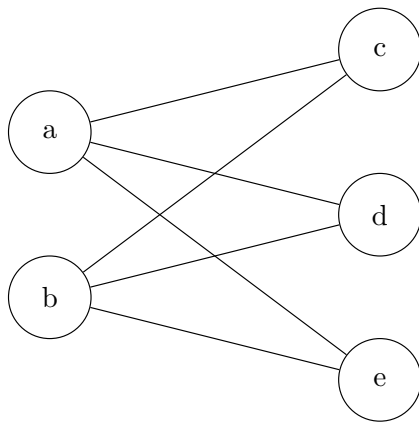


Figura: $K_{2,3}$: grafo bipartido com conjuntos $V_1 = \{a, b\}$ e $V_2 = \{c, d, e\}$.

Conceitos: grafo completo

Definição (Grafo completo)

Um grafo $G = (V, E)$ é dito **completo** se cada par de vértices distintos em V estiver conectado por uma aresta em E . Em outras palavras, um grafo completo é um grafo no qual todos os vértices são adjacentes entre si.

Em um grafo completo, há exatamente $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ arestas.

Na versão direcionada, um grafo completo é um grafo no qual todos os pares de vértices distintos estão conectados por dois arcos, um em cada direção. Em um grafo completo direcionado, há exatamente $n(n-1) = n^2 - n$ arcos.

Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n .

Exemplo: grafo completo

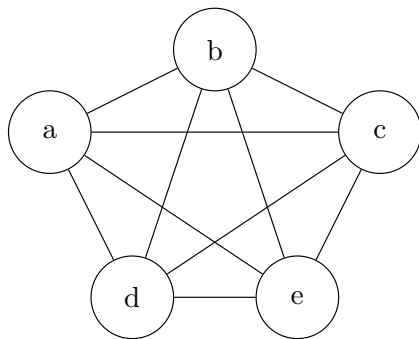


Figura: K_5 , grafo completo com 5 vértices e 10 arestas.

Sumário

Introdução

Conceitos

Representação

Representação computacional

- ▶ Existem várias formas de representar um grafo em um computador.
- ▶ Cada método possui vantagens e desvantagens, dependendo do tipo de grafo e das operações que serão realizadas sobre ele.
- ▶ As principais representações computacionais de um grafo são aquelas baseadas em matrizes e em listas.
- ▶ Para facilitar, normalmente associamos um índice de 0 a $n - 1$ a cada vértice do grafo, e um índice de 0 a $m - 1$ a cada aresta ou arco.

Sumário

Representação

Matrizes

Listas

Considerações

Matriz de incidências

Definição (Matriz de incidências)

A matriz de incidência de um grafo $G = (V, E)$ é uma matriz $M_{n \times m}$ em que cada linha corresponde a um vértice de V e cada coluna corresponde a uma aresta de E . A entrada $M[i][j]$ da matriz é 1 se a aresta j incide no vértice i , e 0 caso contrário.

$$M[i][j] = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } j \text{ incide no vértice } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

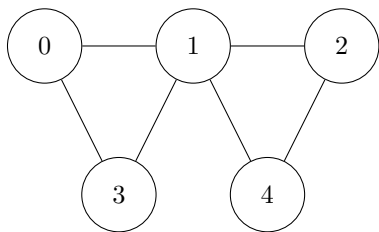
Matriz de incidências

Definição (Matriz de incidências)

Na versão direcionada, a entrada $M[i][j]$ da matriz é -1 se o arco j sai do vértice i , 1 se o arco j entra no vértice i , e 0 caso contrário.

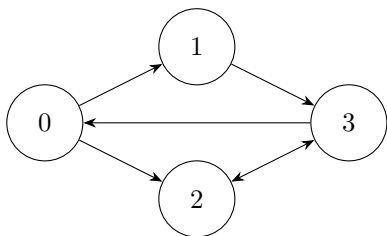
$$M[i][j] = \begin{cases} -1, & \text{se o arco } j \text{ sai do vértice } i \\ 1, & \text{se o arco } j \text{ entra no vértice } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo: matriz de incidências



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo: matriz de incidências



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de adjacências

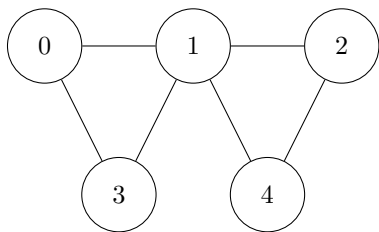
Definição (Matriz de adjacências)

A matriz de adjacências de um grafo $G = (V, E)$ é uma matriz $M_{n \times n}$ em que cada linha e cada coluna correspondem a um vértice de V . A entrada $M[i][j]$ da matriz é 1 se existe uma aresta ligando o vértice i ao vértice j , e 0 caso contrário.

$$M[i][j] = \begin{cases} 1, & \text{se existe uma aresta ligando } i \text{ a } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

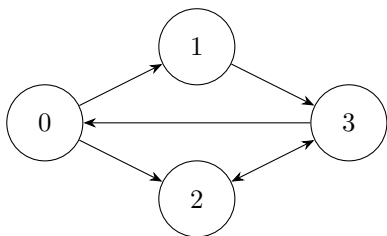
Em um grafo não-direcionado a matriz é simétrica, isto é, $M[i][j] = M[j][i]$ para todo i, j .

Exemplo: matriz de adjacências



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo: matriz de adjacências



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sumário

Representação

Matrizes

Listas

Considerações

Lista de arestas

Definição (Lista de arestas)

A lista de arestas de um grafo $G = (V, E)$ é uma lista que contém todas as arestas do grafo. Cada aresta é representada por um par de vértices que ela conecta.

Para grafos direcionados, cada arco é representado por um par ordenado de vértices.

Lista de adjacências

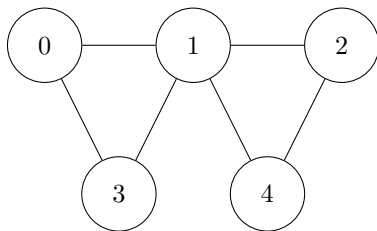
Definição (Lista de adjacências)

A lista de adjacências de um grafo $G = (V, E)$ é uma lista que contém, para cada vértice $i \in V$, a lista de todos os vértices adjacentes a i .

Para grafos direcionados, a lista de adjacências contém, para cada vértice $u \in V$, a lista de todos os vértices $v \in V$ tais que $(u, v) \in A$.

Em um grafo não-direcionado, se v está na lista de u , u está na lista de v .

Exemplo: lista de adjacências



0	1	3
---	---	---

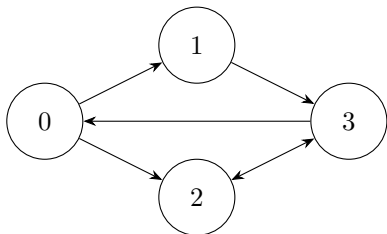
1	0	2	4	3
---	---	---	---	---

2	1	4
---	---	---

3	0	1
---	---	---

4	2	1
---	---	---

Exemplo: lista de adjacências



0	1	2
---	---	---

1	3
---	---

2	3
---	---

3	2	0
---	---	---

Sumário

Representação

Matrizes

Listas

Considerações

Considerações

- ▶ Essencialmente, na representação de matrix ou lista de adjacências, o grafo não direcionado é tratado como um grafo direcionado, com dois arcos para cada aresta do grafo não direcionado.
- ▶ Representações baseadas em matrizes são mais eficientes para grafos densos, enquanto representações baseadas em listas são mais eficientes para grafos esparsos.
- ▶ O espaço utilizado por uma matriz de adjacências é $\Theta(n^2)$, enquanto o espaço utilizado por uma lista de adjacências é $\Theta(n + m)$.
- ▶ Verificar as adjacências de um vértice u é mais barato em lista de adjacências, onde gastamos $\Theta(\deg(u))$, enquanto em uma matriz de adjacências gastamos $\Theta(n)$.
- ▶ Alguns algoritmos se beneficiam de uma representação em matriz, enquanto outros se beneficiam de uma representação em lista.