Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília – Câmpus Taguatinga
Ciência da Computação – Teoria da Computação
Lista de Exercícios – Conceitos Básicos
Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

Aluno: ____
Matrícula: ____

Exercício 1

Examine os seguintes conjuntos e descreva em português a descrição de cada um:

(a) $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$

(b) $\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots$

(c) $\{n | n = 2m \text{ para algum m} \in \mathbb{N}\}$

(d) $\{n | n = 2m \text{ para algum m} \in \mathbb{N} \wedge n = 3k \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$

(e) $\{w | w \text{ é uma string de 0s e 1s e } w = w^R\}$

(f) $\{n | n \in \mathbb{Z} \wedge n = n + 1\}$

Exercício 2

Dada as seguintes descrições informais dos conjuntos, escreva eles usando uma notação formal:

(a) O conjunto contendo os números 1, 10 e 100.

(b) O conjunto contendo todos os inteiros maiores que 5.

(c) O conjunto com a palavra *aba*.

(d) O conjunto contendo a palavra vazia

(e) O conjunto não contendo coisa alguma.

Exercício 3

Seja $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{x, y\}$.

(a) $A \subseteq B$?

(b) $B \subseteq A$?

(c) Quem é $A \cup B$?

(d) Quem é $A \cap B$?

(e) Quem é $A \times B$?

(f) Quem é $\mathcal{P}(B)$?

Exercício 4

Se $|A| = a$ e $|B| = b$ quantos elementos tem $A \times B$?.

Exercício 5

Se $|C| = c$, quantos elementos possui $\mathcal{P}(C)$?

Exercício 6

Seja $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Tome $f = X \to Y$ e $g : X \times Y \to Y$ descritas como:

n	$f(n)$
1	6
2	7
3	6
4	7
5	6

g	6	7	8	9	10
1	10	10	10	10	10
2	7	10	10	10	10
3	7	10	10	10	10
4	9	10	10	10	10
5	6	10	10	10	10

(a) Quem é $f(2)$?

(b) Qual o domínio e contradomínio de f.

(c) Quem é $g(2, 10)$?

(d) Quem é o domínio e contradomínio de g?

(e) Qual é o valor de $g(4, f(4))$?

Exercício 7

Desenhe o grafo $G = (V, E)$ com $V = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 4), (1, 4)\}$.

Além disto, responda:

(a) Qual o grau do nó 1?

(b) Qual o grau do nó 3?

(c) Indique um caminho do nó 3 ao nó 4.

Exercício 8

Prove que:

(a) Para qualquer inteiro x, se x é par, então para qualquer inteiro y, xy é par também.

(b) Para qualquer inteiro x e para qualquer inteiro y, se x é ímpar e y é ímpar, então $x + y$ é par.

(c) Para qualquer inteiro x, se x é ímpar, então x^3 é ímpar.

Exercício 9

Prove que, para qualquer inteiro x, se x é ímpar, então existe um inteiro y tal que $x^2 = 8y + 1$.

Exercício 10

Prove que se x é racional e y é irracional então $x + y$ é irracional.

Exercício 11

Dado um número real $x \neq 1$. Mostre que para qualquer inteiro positivo n, temos que:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Exercício 12

Prove que todo grafo $G(V, E)$ com $|V| \geq 2$ tem pelo menos dois nós com graus iguais.

Exercício 13

Suponha que você tenha n lâmpadas em sequência, cada qual numerada de 0 a $n - 1$, de modo que a lâmpada 0 seja a única acesa.

O Sr. Roberval, responsável pela instalação das lâmpadas, fez um serviço mal feito através de várias gambiarras. Da forma como está a rede elétrica, para ligar ou desligar a lâmpada i é necessário que a lâmpada $i + 1$ esteja ligada e que as lâmpadas $i + 2, \ldots, n - 1$ estejam desligadas. A lâmpada $n - 1$ pode ser ligada ou desligada a qualquer momento, independentemente do estado das demais.

Prove que o número mínimo de operações de ligar/desligar para apagar todas as lâmpadas é $2^n - 1$.

Solution: A prova é por indução.

Caso base: Quando temos uma lâmpada e ela está ligada, é necessário

$$1 = 2^n - 1 = 2^1 - 1$$

movimentos.

Então o caso base vale.

Hipótese de indução: Suponha que para qualquer número de lâmpadas $k < n$, conseguimos apagar a k-ésima lâmpada com as demais desligadas utilizando $2^k - 1$ movimentos.

Passo de indução: Resta provar o mesmo resultado para n. Neste cenário, apenas a lâmpada 0 está ligada enquanto as demais estão desligadas. Para desligar todas, precisamos:

1. Ligar apenas a lâmpada 1 com as demais desligadas, o que leva $2^{n-1} - 1$ passos pela hipótese de indução. Uma vez que podemos utilizar o mesmo procedimento para apagar a lâmpada 1 quando somente ela está ligada, mas para acendê-la.

2. Desligar a lâmpada 0, levando 1 passso.

3. Desligar a lâmpada 1 e manter as posteriores desligadas, o que leva $2^{n-1} - 1$ passos pela hipótese de indução.

Somando 1,2 e 3, temos que o número de movimentos necessários para desligar a lâmpada 0 no cenário original é $2^n - 1$.