MC102 – Aula27
Recursão IV - QuickSort

Eduardo C. Xavier

Instituto de Computação – Unicamp

13 de Junho de 2017

Introdução

Vamos usar a técnica de recursão para resolver o problema de ordenação.

- Problema:
  - Temos um vetor v de inteiros de tamanho n.
  - Devemos deixar v ordenado em ordem crescente de valores.
- Veremos um algoritmo baseado na técnica **dividir-e-conquistar** que usa recursão.

Introdução

Vamos usar a técnica de recursão para resolver o problema de ordenação.

- Problema:
  - Temos um vetor v de inteiros de tamanho n.
  - Devemos deixar v ordenado em ordem crescente de valores.
- Veremos um algoritmo baseado na técnica **dividir-e-conquistar** que usa recursão.

Dividir e Conquistar

- Temos que resolver um problema P de tamanho n.
- Mostramos como resolver casos básicos, como quando $n = 1$.
- Para $n > 1$ fazemos:
  - **Dividir:** Quebramos P em sub-problemas menores.
  - Resolvemos os sub-problemas de forma recursiva (Hip. Ind.).
  - **Conquistar:** Unimos as soluções dos sub-problemas para obter solução do problema maior P.

Dividir e Conquistar

- Temos que resolver um problema P de tamanho n.
- Mostramos como resolver casos básicos, como quando $n = 1$.
- Para $n > 1$ fazemos:
  - **Dividir:** Quebramos P em sub-problemas menores.
  - Resolvemos os sub-problemas de forma recursiva (Hip. Ind.).
  - **Conquistar:** Unimos as soluções dos sub-problemas para obter solução do problema maior P.

Dividir e Conquistar

- Temos que resolver um problema P de tamanho n.
- Mostramos como resolver casos básicos, como quando $n = 1$.
- Para $n > 1$ fazemos:
  - **Dividir:** Quebramos P em sub-problemas menores.
  - Resolvemos os sub-problemas de forma recursiva (Hip. Ind.).
  - **Conquistar:** Unimos as soluções dos sub-problemas para obter solução do problema maior P.

Dividir e Conquistar

- Temos que resolver um problema P de tamanho n.
- Mostramos como resolver casos básicos, como quando $n = 1$.
- Para $n > 1$ fazemos:
  - **Dividir:** Quebramos P em sub-problemas menores.
  - Resolvemos os sub-problemas de forma recursiva (Hip. Ind.).
  - **Conquistar:** Unimos as soluções dos sub-problemas para obter solução do problema maior P.

Quick-Sort

- O Quick-Sort é um algoritmo baseado na técnica dividir-e-conquistar.
- Vamos supor que devemos ordenar um vetor de uma posição *ini* até *fim* com n elementos ($n = fim - ini + 1$).
- Se $n = 1$ então o problema está resolvido pois o vetor está ordenado.
- Para $n > 1$ temos:
  - **Dividir:**
    - Escolha em elemento especial do vetor chamado *pivô*.
    - Particione o vetor em uma posição *pos* tal que todos elementos de *ini* até $pos - 1$ são menores ou iguais do que o *pivô*, e todos elementos de *pos* até *fim* são maiores ou iguais ao *pivô*.
  - Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estes dois sub-vetores (um de *ini* até $pos - 1$ e o outro de *pos* até *fim*).
  - **Conquistar:** Nada a fazer, já que o vetor estará ordenado devido à como foi feito a fase de divisão.

Quick-Sort

- O Quick-Sort é um algoritmo baseado na técnica dividir-e-conquistar.
- Vamos supor que devemos ordenar um vetor de uma posição *ini* até *fim* com n elementos ($n = fim - ini + 1$).
- Se $n = 1$ então o problema está resolvido pois o vetor está ordenado.
- Para $n > 1$ temos:
  - **Dividir:**
    - Escolha em elemento especial do vetor chamado *pivô*.
    - Particione o vetor em uma posição *pos* tal que todos elementos de *ini* até $pos - 1$ são menores ou iguais do que o *pivô*, e todos elementos de *pos* até *fim* são maiores ou iguais ao *pivô*.
  - Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estes dois sub-vetores (um de *ini* até $pos - 1$ e o outro de *pos* até *fim*).
  - **Conquistar:** Nada a fazer, já que o vetor estará ordenado devido à como foi feito a fase de divisão.

Quick-Sort

- O Quick-Sort é um algoritmo baseado na técnica dividir-e-conquistar.
- Vamos supor que devemos ordenar um vetor de uma posição *ini* até *fim* com n elementos ($n = fim - ini + 1$).
- Se $n = 1$ então o problema está resolvido pois o vetor está ordenado.
- Para $n > 1$ temos:
  - **Dividir:**
    - Escolha em elemento especial do vetor chamado *pivô*.
    - Particione o vetor em uma posição *pos* tal que todos elementos de *ini* até $pos - 1$ são menores ou iguais do que o *pivô*, e todos elementos de *pos* até *fim* são maiores ou iguais ao *pivô*.
  - Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estes dois sub-vetores (um de *ini* até $pos - 1$ e o outro de *pos* até *fim*).
  - **Conquistar:** Nada a fazer, já que o vetor estará ordenado devido à como foi feito a fase de divisão.

Quick-Sort

- O Quick-Sort é um algoritmo baseado na técnica dividir-e-conquistar.
- Vamos supor que devemos ordenar um vetor de uma posição *ini* até *fim* com n elementos ($n = fim - ini + 1$).
- Se $n = 1$ então o problema está resolvido pois o vetor está ordenado.
- Para $n > 1$ temos:
  - **Dividir:**
    - Escolha em elemento especial do vetor chamado *pivô*.
    - Particione o vetor em uma posição *pos* tal que todos elementos de *ini* até $pos - 1$ são menores ou iguais do que o *pivô*, e todos elementos de *pos* até *fim* são maiores ou iguais ao *pivô*.
  - Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estes dois sub-vetores (um de *ini* até $pos - 1$ e o outro de *pos* até *fim*).
  - **Conquistar:** Nada a fazer, já que o vetor estará ordenado devido à como foi feito a fase de divisão.

Quick-Sort

- O Quick-Sort é um algoritmo baseado na técnica dividir-e-conquistar.
- Vamos supor que devemos ordenar um vetor de uma posição *ini* até *fim* com n elementos ($n = fim - ini + 1$).
- Se $n = 1$ então o problema está resolvido pois o vetor está ordenado.
- Para $n > 1$ temos:
  - **Dividir:**
    - Escolha em elemento especial do vetor chamado *pivô*.
    - Particione o vetor em uma posição *pos* tal que todos elementos de *ini* até $pos - 1$ são menores ou iguais do que o *pivô*, e todos elementos de *pos* até *fim* são maiores ou iguais ao *pivô*.
  - Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estes dois sub-vetores (um de *ini* até $pos - 1$ e o outro de *pos* até *fim*).
  - **Conquistar:** Nada a fazer, já que o vetor estará ordenado devido à como foi feito a fase de divisão.

Quick-Sort

- Note a similaridade do Quick-Sort com o Merge-Sort.
- Porém o maior trabalho do Merge-Sort está na fase de conquista onde é necessário fazer a fusão.
- No Quick-Sort o maior trabalho está na fase de Divisão pois é necessário fazer um particionamento do vetor.

Quick-Sort: Particionamento

Dado um valor p como pivô, como fazer o particionamento?

- Podemos "varrer" o vetor do início para o fim até encontrarmos um elemento maior que o pivô.
- Varremos o vetor do fim para o início até encontrarmos um elemento menor ou igual ao pivô.
- Trocamos então estes elementos de posições e continuamos com o processo até termos verificado todas as posições do vetor.

Quick-Sort: Particionamento

Dado um valor p como pivô, como fazer o particionamento?

- Podemos "varrer" o vetor do início para o fim até encontrarmos um elemento maior que o pivô.
- Varremos o vetor do fim para o início até encontrarmos um elemento menor ou igual ao pivô.
- Trocamos então estes elementos de posições e continuamos com o processo até termos verificado todas as posições do vetor.

Quick-Sort: Particionamento

Dado um valor p como pivô, como fazer o particionamento?

- Podemos "varrer" o vetor do início para o fim até encontrarmos um elemento maior que o pivô.
- Varremos o vetor do fim para o início até encontrarmos um elemento menor ou igual ao pivô.
- Trocamos então estes elementos de posições e continuamos com o processo até termos verificado todas as posições do vetor.

Quick-Sort: Particionamento

Dado um valor p como pivô, como fazer o particionamento?

- Podemos "varrer" o vetor do início para o fim até encontrarmos um elemento maior que o pivô.
- Varremos o vetor do fim para o início até encontrarmos um elemento menor ou igual ao pivô.
- Trocamos então estes elementos de posições e continuamos com o processo até termos verificado todas as posições do vetor.

Quick-Sort: Particionamento

A função retorna a posição de partição. Ela considera sempre o último elemento como o pivô.

```
void troca(int *a, int *b){
  int aux = *a;
  *a = *b;
  *b = aux;
}

int particiona(int v[], int ini, int fim){
  int pivo = v[fim];

  while(ini<fim){
    while(ini < fim && v[ini] <= pivo) //para quando encontrar elemento
      ini++;                           //maior que o pivô

    while(ini < fim && v[fim] > pivo)//para quando encontrar elemento
      fim--;                          //menor ou igual ao pivô

    troca(&v[ini], &v[fim]); //troca estes elementos de posição
  }
  return ini;
}
```

Quick-Sort: Particionamento

Exemplo: (1,9,3,7,6,2,3,8,5) e pivô=5.

- (1,9,3,7,6,2,3,8,5) → (1,5,3,7,6,2,3,8,9)
- (1,5,3,7,6,2,3,8,9) → (1,5,3,3,6,2,7,8,9)
- (1,5,3,3,6,2,7,8,9) → (1,5,3,3,2,6,7,8,9)
- (1,5,3,3,2,6,7,8,9) → Retorna posição 5.

- Note que no fim da função garantimos que todos elementos de 0 até (ini −1) são menores ou iguais ao pivô, e de *ini* em diante são maiores.

Quick-Sort: Particionamento

Exemplo: (1,9,3,7,6,2,3,8,5) e pivô=5.

- (1,9,3,7,6,2,3,8,5) $\rightarrow$ (1,5,3,7,6,2,3,8,9)
- (1,5,3,7,6,2,3,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,6,2,7,8,9)
- (1,5,3,3,6,2,7,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,2,6,7,8,9)
- (1,5,3,3,2,6,7,8,9) $\rightarrow$ Retorna posição 5.

- Note que no fim da função garantimos que todos elementos de 0 até (ini -1) são menores ou iguais ao pivô, e de *ini* em diante são maiores.

Quick-Sort: Particionamento

Exemplo: (1,9,3,7,6,2,3,8,5) e pivô=5.

- (1,9,3,7,6,2,3,8,5) $\rightarrow$ (1,5,3,7,6,2,3,8,9)
- (1,5,3,7,6,2,3,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,6,2,7,8,9)
- (1,5,3,3,6,2,7,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,2,6,7,8,9)
- (1,5,3,3,2,6,7,8,9) $\rightarrow$ Retorna posição 5.

- Note que no fim da função garantimos que todos elementos de 0 até (ini -1) são menores ou iguais ao pivô, e de *ini* em diante são maiores.

Quick-Sort: Particionamento

Exemplo: (1,9,3,7,6,2,3,8,5) e pivô=5.

- (1,9,3,7,6,2,3,8,5) → (1,5,3,7,6,2,3,8,9)
- (1,5,3,7,6,2,3,8,9) → (1,5,3,3,6,2,7,8,9)
- (1,5,3,3,6,2,7,8,9) → (1,5,3,3,2,6,7,8,9)
- (1,5,3,3,2,6,7,8,9) → Retorna posição 5.

- Note que no fim da função garantimos que todos elementos de 0 até (ini −1) são menores ou iguais ao pivô, e de *ini* em diante são maiores.

Quick-Sort: Particionamento

Exemplo: (1,9,3,7,6,2,3,8,5) e pivô=5.

- (1,9,3,7,6,2,3,8,5) $\rightarrow$ (1,5,3,7,6,2,3,8,9)
- (1,5,3,7,6,2,3,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,6,2,7,8,9)
- (1,5,3,3,6,2,7,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,2,6,7,8,9)
- (1,5,3,3,2,6,7,8,9) $\rightarrow$ Retorna posição 5.

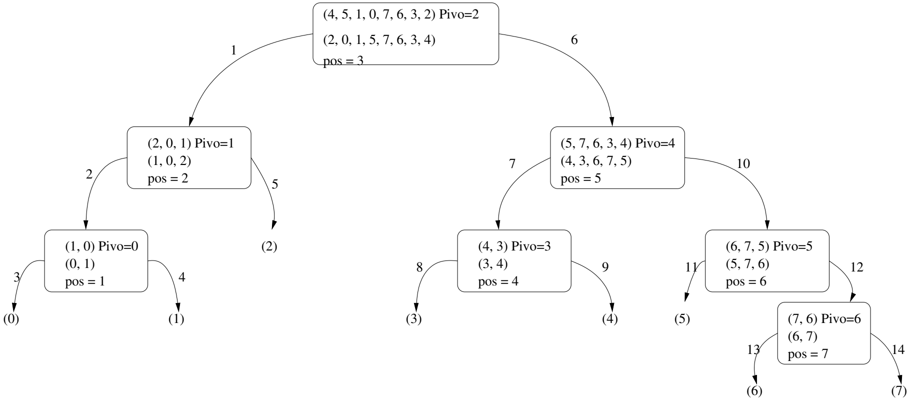
- Note que no fim da função garantimos que todos elementos de 0 até (ini -1) são menores ou iguais ao pivô, e de *ini* em diante são maiores.

Quick-Sort

```
void quickSort(int v[], int ini, int fim){
  if(ini < fim){ //só faz ordenação se tiver pelo
                  //menos 2 elementos
    int pos = particiona(v, ini, fim);
    quickSort(v,ini, pos-1);
    quickSort(v,pos, fim);
  }
}
```

Quick-Sort

Abaixo temos um exemplo da árvore de recursão com ordem das chamadas recursivas.



Quick-Sort

- Se o Quick-Sort particionar o vetor de tal forma que cada partição tenha mais ou menos o mesmo tamanho ele é muito eficiente.
- Porém se a partição for muito desigual ($n-1$ de um lado e 1 de outro) ele é ineficiente.
- Quando um vetor já está ordenado ou quase-ordenado, ocorre este caso ruim. Por que?

Quick-Sort

- Se o Quick-Sort particionar o vetor de tal forma que cada partição tenha mais ou menos o mesmo tamanho ele é muito eficiente.
- Porém se a partição for muito desigual ($n - 1$ de um lado e 1 de outro) ele é ineficiente.
- Quando um vetor já está ordenado ou quase-ordenado, ocorre este caso ruim. Por que?

Quick-Sort

- Se o Quick-Sort particionar o vetor de tal forma que cada partição tenha mais ou menos o mesmo tamanho ele é muito eficiente.
- Porém se a partição for muito desigual ($n - 1$ de um lado e 1 de outro) ele é ineficiente.
- Quando um vetor já está ordenado ou quase-ordenado, ocorre este caso ruim. Por que?

Quick-Sort: Tratando o pior caso

- Podemos implementar o Quick-Sort de tal forma a diminuirmos a chance de ocorrência do pior caso.
- Ao invés de escolhermos o pivô como um elemento de uma posição fixa, podemos escolher como pivô o elemento de uma posição aleatória.
- Podemos usar a função *rand* em *stdlib.h* que retorna um número de forma aleatória entre 0 e *RAND_MAX*.

Quick-Sort: Tratando o pior caso

- Podemos implementar o Quick-Sort de tal forma a diminuirmos a chance de ocorrência do pior caso.
- Ao invés de escolhermos o pivô como um elemento de uma posição fixa, podemos escolher como pivô o elemento de uma posição aleatória.
- Podemos usar a função *rand* em *stdlib.h* que retorna um número de forma aleatória entre 0 e *RAND_MAX*.

Quick-Sort: Tratando o pior caso

- Podemos implementar o Quick-Sort de tal forma a diminuirmos a chance de ocorrência do pior caso.
- Ao invés de escolhermos o pivô como um elemento de uma posição fixa, podemos escolher como pivô o elemento de uma posição aleatória.
- Podemos usar a função *rand* em *stdlib.h* que retorna um número de forma aleatória entre 0 e *RAND_MAX*.

Random-Quick-Sort

- A única diferença é que escolhemos um elemento aleatório.
- Tal elemento é trocado com o que está no fim (será o pivô).

```
void randomQuickSort(int v[],int ini, int fim){
  int j;

  //Suponha fim=9 e ini=3. j deve ser um valor aleatorio
  //entre 0 e 6 tal que ini+j esteja entre 3 e 9.
  j = rand()%(fim-ini+1);
  troca(&v[ini+j], &v[fim]);
  if(ini < fim){ //tem pelo menos 2 elementos
    int pos = particiona(v, ini, fim);
    randomQuickSort(v, ini, pos-1);
    randomQuickSort(v, pos, fim);
  }
}
```

- A chance de ocorrer um caso ruim para o Random-Quick-Sort é desprezível.

Random-Quick-Sort

- A única diferença é que escolhemos um elemento aleatório.
- Tal elemento é trocado com o que está no fim (será o pivô).

```
void randomQuickSort(int v[],int ini, int fim){
  int j;

  //Suponha fim=9 e ini=3. j deve ser um valor aleatorio
  //entre 0 e 6 tal que ini+j esteja entre 3 e 9.
  j = rand()%(fim-ini+1);
  troca(&v[ini+j], &v[fim]);
  if(ini < fim){ //tem pelo menos 2 elementos
    int pos = particiona(v, ini, fim);
    randomQuickSort(v, ini, pos-1);
    randomQuickSort(v, pos, fim);
  }
}
```

- A chance de ocorrer um caso ruim para o Random-Quick-Sort é desprezível.

Random-Quick-Sort

- A chance de ocorrer um caso ruim para o Random-Quick-Sort é desprezível.

Random-Quick-Sort

- Implementadas as funções anteriores podemos rodar o exemplo:

```
int main(){
  int v[] ={9,8,1,6,6,4,3,2,1,1};
  int i;
  randomQuickSort(v, 0, 9);
  for(i=0; i<10; i++)
    printf("%d, ",v[i]);
}
```

Exercícios

1. Aplique o algoritmo de particionamento sobre o vetor $(13, 19, 9, 5, 12, 21, 7, 4, 11, 2, 6, 6)$ com pivô igual a 6.
2. Qual o valor retornado pelo algoritmo de particionamento se todos os elementos do vetor tiverem valores iguais?
3. Faça uma execução passo-a-passo do Quick-Sort com o vetor $(4, 3, 6, 7, 9, 10, 5, 8)$.
4. Modifique o algoritmo QuickSort para ordenar vetores em ordem decrescente.