

partition $\in \mathcal{NP}$

Daniel Saad

22 de junho de 2026

Considere os seguintes problemas:

Definição 1 (partition). *Entrada: conjunto S de inteiros positivos. Saída: Verdadeiro se e somente se existem subconjuntos $S_1 \subseteq S$ e $S_2 \subseteq S$ tais que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \cup S_2 = S$ e $\sum_{x \in S_1} x = \sum_{x \in S_2} x$.*

Definição 2 (subset-sum). *Entrada: conjunto X de inteiros positivos e inteiro positivo k . Saída: Verdadeiro se e somente se existe um subconjunto $X' \subseteq X$ tal que $\sum_{x \in X'} x = k$.*

Além disso, assumo que subset-sum $\in \mathcal{NP}$.

Queremos mostrar que partition $\in \mathcal{NP}$. Primeiramente mostraremos que partition $\in \mathcal{NP}$ e depois mostraremos que subset-sum $\leq_p$ partition.

Teorema 1. partition $\in \mathcal{NP}$.

Demonstração. Tome o certificado $C = (S_1, S_2)$, onde S_1 e S_2 são subconjuntos de S . A verificação de que C é um certificado válido para a entrada S pode ser feita em tempo polinomial, verificando se $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \cup S_2 = S$ e $\sum_{x \in S_1} x = \sum_{x \in S_2} x$. Portanto, partition $\in \mathcal{NP}$. $\square$

Teorema 2. subset-sum $\leq_p$ partition.

Demonstração. Seja $t = \sum_{x \in X} x$.

Caso 1: $t = 2k$. Neste caso, a entrada (X, k) para subset-sum é mapeada para a entrada $S = X$

Caso 2: $t \neq 2k$. Neste caso, a entrada (X, k) para subset-sum é mapeada para a entrada $S = X \cup \{2t + k\} \cup \{3t - k\}$

Suponha que X tenha um subconjunto $X' \subseteq X$ tal que $\sum_{x \in X'} x = k$. Então, no caso 1, temos que $S_1 = X'$ e $S_2 = X \setminus X'$ formam uma partição de S com somas iguais. No caso 2, podemos formar uma partição de S com $S_1 = X' \cup \{3t - k\}$ e $S_2 = (X \setminus X') \cup \{2t + k\}$, garantindo que as somas sejam iguais a $3t$.

Agora tome S_1 e S_2 partições de S . No caso 1, temos que $S_1 \subseteq X$ e $S_2 \subseteq X$, e portanto, $\sum_{x \in S_1} x = \sum_{x \in S_2} x = k$. No caso 2, sem perda de generalidade, suponha que $3t - k \in S_1$ e $2t + k \in S_2$. Então, temos que $\sum_{x \in S_1} x = \sum_{x \in S_2} x = 3t$, o que implica que $\sum_{x \in S_1 \setminus \{3t - k\}} x = k$ e portanto, $S_1 \setminus \{3t - k\}$ é um subconjunto de X cuja soma é igual a k . $\square$