



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília – Câmpus Taguatinga
Ciência da Computação – Análise de Algoritmos
Lista de Exercícios – Análise Assintótica
Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

Aluno: _____

Matrícula: _____

Exercício 1

Demonstre que:

- (a) $n! \in \omega(2^n)$
- (b) $n! \in o(n^n)$
- (c) $k \log n \in \Theta(n) \Rightarrow k \in \Theta(n/\log n)$.

Exercício 2

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções monotonicamente crescentes. Prove ou ache um contra-exemplo cada uma das seguintes conjecturas:

- (a) $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in O(f(n))$
- (b) $f(n) + g(n) \in \Theta(\min(f(n), g(n)))$
- (c) $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \log(f(n)) \in O(\log(g(n)))$, onde $\log(g(n)) \geq 1$ e $f(n) \geq 1$ para n suficientemente largo
- (d) $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$
- (e) $f(n) \in O((f(n))^2)$
- (f) $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$
- (g) $f(n) \in \Theta(f(n/2))$
- (h) $f(n) + o(f(n)) \in \Theta(f(n))$

Exercício 3

Mostre que para constantes $a, b \in \mathbb{R}$ com $b \geq 0$ que:

$$(n + a)^b \in \Theta(n^b)$$

Exercício 4

Seja

$$p(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i$$

onde $a_i > 0$. Seja k uma constante, ise as definições de notação assintótica para provar as seguintes propriedades:

- (a) Se $k \geq d$, então $p(n) \in O(n^k)$
- (b) Se $k \leq d$, então $p(n) \in \Omega(n^k)$
- (c) Se $k = d$, então $p(n) \in \Theta(n^k)$
- (d) Se $k > d$, então $p(n) \in o(n^k)$
- (e) Se $k < d$, então $p(n) \in \omega(n^k)$

Exercício 5

Indique, para cada par de expressões (A, B) na tabela abaixo, se A é O , o , Ω , ω ou Θ de B . Assuma $k \geq 1$, $\epsilon > 0$ e $c > 1$ são constantes. Sua resposta deve estar na forma “sim” ou “não”.

	A	B	O	o	Ω	ω	Θ
a)	$\log^k n$	n^ϵ					
b)	n^k	c^n					
c)	$\sqrt{n}$	$c^{\sin(n)}$					
d)	2^n	$2^{n/2}$					
e)	$n^{\log c}$	$c^{\log n}$					
f)	$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$					

Exercício 6

Demonstre que:

$$n! \gg c^n \gg n^3 \gg n^2 \gg n^{1+\epsilon} \gg n \log n \gg n \gg \sqrt{n} \gg \log^2 n \gg \log n \gg \log n / \log \log n \gg \log \log n \gg 1$$

Exercício 7

Verdadeiro ou falso?

- (a) $2^{n+1} \in O(2^n)$
- (b) $2^{2n} \in O(2^n)$

Exercício 8

Para cada um dos seguintes pares $f(n)$ e $g(n)$, identifique se $f(n) \in O(g(n))$, $f(n) \in \Omega(g(n))$ ou $f(n) \in \Theta(g(n))$.

- (a) $f(n) = \log^2 n$; $g(n) = \log n + 5$
- (b) $f(n) = \sqrt{n}$; $g(n) = \lg n$
- (c) $f(n) = \log^2 n$; $g(n) = \log n$
- (d) $f(n) = n$; $g(n) = \log^2 n$
- (e) $f(n) = n \log n$; $g(n) = \log n$
- (f) $f(n) = 10$; $g(n) = \log 10$
- (g) $f(n) = 2^n$; $g(n) = 10n^2$

-
- (h) $f(n) = 2^n; g(n) = 3^n$
 - (i) $f(n) = n + 2\sqrt{n}; g(n) = n^2$
 - (j) $f(n) = n \log n; g(n) = \frac{n\sqrt{n}}{2}$
 - (k) $f(n) = n + \log n; g(n) = \sqrt{n}$
 - (l) $f(n) = 2(\log n)^2; g(n) = \log n + 1$
 - (m) $f(n) = 4n \log n; g(n) = (n^2 - n)/2$

Exercício 9

Prove que $n^3 - 3n^2 - n + 1 \in \Theta(n^3)$

Exercício 10

Demonstre que:

- (a) Se $f_1(n) \in O(g_1(n))$ e $f_2(n) \in O(g_2(n))$, então $f_1(n) + f_2(n) \in O(g_1(n) + g_2(n))$
- (b) Se $f_1(n) \in \Omega(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Omega(g_2(n))$, então $f_1(n) + f_2(n) \in \Omega(g_1(n) + g_2(n))$
- (c) Se $f_1(n) \in \Omega(g_1(n))$ e $f_2(n) \in \Omega(g_2(n))$, então $f_1(n) \cdot f_2(n) \in \Omega(g_1(n) \cdot g_2(n))$

Exercício 11

Liste as funções da menor pra maior ordem assintótica. Se duas funções são da mesma ordem, indique.

n	2^n	$n \log n$	$\ln n$
$n - n^3 + 7n^5$	$\log n$	$\sqrt{n}$	e^n
$n^2 + \log n$	n^2	2^{n-1}	$\log \log n$
n^3	$(\log n)^2$	$n!$	$n^{1+\epsilon}, 0 < \epsilon < 1$

Exercício 12

Ache, caso existam, duas funções $f(n)$ e $g(n)$ que satisfazem as seguintes relações,

- (a) $f(n) \in o(g(n))$ e $f(n) \notin \Theta(g(n))$
- (b) $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $f(n) \notin o(g(n))$
- (c) $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $f(n) \notin O(g(n))$
- (d) $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $f(n) \notin O(g(n))$

Exercício 13

Para cada uma das perguntas, justifique sua resposta:

- (a) Se existe uma prova que um algoritmo leva no pior caso tempo $O(n^2)$, é possível que ele leve tempo $O(n)$ em algumas instâncias?
- (b) Se existe uma prova que um algoritmo leva no pior caso tempo $O(n^2)$, é possível que ele leve tempo $O(n)$ em todas as instâncias?
- (c) Se existe uma prova que um algoritmo leva no pior caso tempo $\Theta(n^2)$, é possível que ele leve tempo $O(n)$ em algumas as instâncias?
- (d) Se existe uma prova que um algoritmo leva no pior caso tempo $\Theta(n^2)$, é possível que ele leve tempo $O(n)$ em todas as instâncias?

-
- (e) A função $f(n) \in \Theta(n^2)$ onde $f(n) = 100n^2$, para n par e $f(n) = 20n^2 - n \log n$ para n ímpar?

Exercício 14

Qual das afirmativas é verdadeira?

- (a) $\sum_{i=1}^n 3^i \in \Theta(3^{n-1})$.
- (b) $\sum_{i=1}^n 3^i \in \Theta(3^n)$.
- (c) $\sum_{i=1}^n 3^i \in \Theta(3^{n+1})$.

Exercício 15

Analise os algoritmos abaixo de maneira mais justa possível:

(a)

```
sum = 0;
2 for (int i=0; i<n; i++){
3     for (int j=i; j<n; j++){
4         sum++;
5     }
6 }
```

(b)

```
sum = 0;
2 for (int i=1; i<=n; i*=2){
3     for (int j=1; j<=n; j++){
4         sum++;
5     }
6 }
```

(c)

```
sum = 0;
2 for (int i=1; i<=n; i*=2){
3     for (int j=1; j<=n; j+=i){
4         sum++;
5     }
6 }
```