Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Brasília – Câmpus Taguatinga
Ciência da Computação – Análise de Algoritmos
Lista de Exercícios – Complexidade Computacional e $\mathcal{NP}$-completude
Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

Aluno: ____

Matrícula: ____

Exercício 1

Defina as classes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{NP}$.

Exercício 2

Discorra sobre a questão $\mathcal{P}$ *vs* $\mathcal{NP}$.

Exercício 3

Demonstrar que existe um algoritmo que leva tempo $O(2^n)$ para `SAT` é suficiente para provar que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$?

Exercício 4

O que significa um problema ser $\mathcal{NP}$-completo? Por que demonstrar que um problema é $\mathcal{NP}$-completo é atestar a sua dificuldade?

Exercício 5

Quais os caminhos para demonstrar que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$? E sobre $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$?

Exercício 6

Tome o problema `LONGEST-PATH`:

- **Entrada:** um grafo $G = (V, E)$, uma função $c : E \to \mathbb{R}$ de custo sobre as arestas e um inteiro k.
- **Saída:** **Verdadeiro** se existe um caminho em G que possui custo $\geq k$, **Falso**, caso contrário.

Demonstre que `LONGEST-PATH` $\in \mathcal{NPC}$.

Dica: Demonstre que `LONGEST-PATH` está em $\mathcal{NP}$ e encontre uma redução de `HAMILTONIAN-PATH` para `LONGEST-PATH` em tempo polinomial. O problema `HAMILTON-PATH` é um problema $\mathcal{NPC}$ e consiste em determinar se um grafo possui um caminho hamiltoniano, isto é, um caminho que passe por todos os vértices (sem repetições):

- **Entrada:** um grafo $G = (V, E)$.
- **Saída:** **Verdadeiro** se existe um caminho hamiltoniano em G, **Falso**, caso contrário.

Exercício 7

Tome o problema TSP:

- **Entrada:** um grafo $G = (V, E)$, uma função $c : E \to \mathbb{R}$ de custo sobre as arestas e um inteiro k.
- **Saída:** **Verdadeiro** se existe um ciclo hamiltoniano de custo $\leq k$ em G, **Falso** caso contrário.

Demonstre que TSP $\in \mathcal{NPC}$.

Dica: Demonstre que TSP está em $\mathcal{NP}$ e encontre uma redução de HAMILTONIAN-CYCLE para TSP em tempo polinomial. O problema HAMILTON-CYCLE é um problema $\mathcal{NPC}$ e consiste em determinar se um grafo possui um ciclo hamiltoniano, isto é, um ciclo que passe por todos os vértices (sem repetições) e retorna ao primeiro:

- **Entrada:** um grafo $G = (V, E)$.
- **Saída:** **Verdadeiro** se existe um ciclo hamiltoniano em G, **Falso**, caso contrário.

Exercício 8

Um conjunto independente de um grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto $V' \subseteq V$ tal que cada aresta de E incide em no máximo um elemento de V', isto é, em outra palavras, não existem arestas ligando dois vértices de V'. Tome o problema do Conjunto Independente, IS:

- **Entrada:** um grafo $G = (V, E)$ um inteiro k.
- **Saída:** **Verdadeiro** se existe um conjunto independente de tamanho $\geq k$ em G, **Falso** caso contrário.

Demonstre que IS $\in \mathcal{NPC}$.

Dica: Demonstre que IS está em $\mathcal{NP}$ e encontre uma redução de CLIQUE para IS em tempo polinomial.

Exercício 9

Tome o problema (PARTITION):

- **Entrada:** Um conjunto $S = \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$ de inteiros positivos.
- **Saída:** **Verdadeiro**, se existem S' e S'' tal que:

$$\sum_{x \in S'} x = \sum_{y \in S''} y$$

  com $S' \cup S'' = S$ e $S' \cap S'' = \emptyset$, **Falso**, caso contrário.

Demonstre que Partition $\in \mathcal{NP}$.

Dica: Demonstre que PARTITION está em $\mathcal{NP}$ e encontre uma redução de SUBSET-SUM para PARTITION em tempo polinomial. O problema SUBSET-SUM é um problema $\mathcal{NP}$ e consiste em determinar se, dado um conjunto de inteiros R e um inteiro k, verificar se existe $R' \subseteq R$ cujos elementos somem k,isto é:

- **Entrada:** um conjunto de inteiros R.
- **Saída:** **Verdadeiro** se existe $R' \subseteq R$, tal que $\sum_{x \in R'} x = k$, **Falso**, caso contrário.

Exercício 10

Tome o problema `BIN-PACKING`:

- **Entrada:** Um conjunto de S de n objetos, cada qual com peso $0 < s_i \leq 1$, e um inteiro k.
- **Saída:** **Verdadeiro**, se é possível empacotar os elementos de S com até k sacos que suportam 1 de peso, **Falso** caso contrário.

Desmontre que `BIN-PACKING` $\in \mathcal{NPC}$.

Dica: Demonstre que `BIN-PACKING` está em $\mathcal{NP}$ e encontre uma redução de `PARTITION` para `BIN-PACKING` em tempo polinomial.

Exercício 11

Demonstre a existência de um 2-algoritmo de aproximação para o problema `VC`.

Exercício 12

Demonstre a existência de um 2-algoritmo de aproximação para o problema `TSP` sobre um espaço euclidiano.