Análise de Algoritmos Cheat Sheet

Daniel Saad Nogueira Nunes

Definições

$$O(g(n)) = \left\{f(n) \mid \exists c \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n), \forall n \geq n_0 \in \mathbb{R}^+\right\}$$
$$\Omega(g(n)) = \left\{f(n) \mid \exists c \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n), \forall n \geq n_0 \in \mathbb{R}^+\right\}$$

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n), \forall n \geq n_0 \in \mathbb{R}^+\}$$

$$o(g(n)) = \left\{f(n) \mid 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n), \forall c \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq n_0 \in \mathbb{R}^+\right\}$$

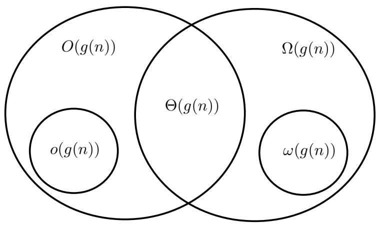
Ou

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f(n) \in o(g(n))$$

$$\omega(g(n)) = \left\{f(n) \mid 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n), \forall c \in \mathbb{R}^+, \forall n \geq n_0 \in \mathbb{R}^+\right\}$$

Ou

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow f(n) \in \omega(g(n))$$



Exponenciais

$$a^m a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$
$$(a^m)^n = a^m n$$
$$(ab)^m = a^m b^m$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$$
$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \quad a \neq 0$$
$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$
$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Logaritmos

$$\log(x) = \log_{10}(x)$$
$$\lg(x) = \log_2(x)$$
$$\ln(x) = \log_e(x)$$
$$(\log_a(x))^k = \log_a^k(x)$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$
$$\log_a(a^x) = x$$
$$a^{\log_a(x)} = x$$
$$b^{\log_a(x)} = x^{\log_a(b)}$$

Teoremas

Todo polilogaritmo é desprezível frente a um polinômio.

$$\log_b^k(n) \in o(n^c), \quad 0 < n, c$$

Isto é:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log_b^k(n)}{n^c} = 0$$

Todo polinomio é desprezível frente a uma exponencial

$$n^c \in o(a^n), \quad c > 0, a > 1$$

Isto é:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^c}{a^n} = 0$$

Método Mestre

Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes e $f(n)$ uma função. Seja $T(n)$ definida nos inteiros não negativos na recorrência:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

Caímos em quatro casos:

1. Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \epsilon})$, para algum $\epsilon > 0 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$.
2. Se $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
3. Se $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$, para algum $\epsilon > 0 \Rightarrow T(n) \in \Theta(f(n))$.
   3.1. Válido somente se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e n suficientemente grande.

Progressões

Soma da P.A

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_1 + i \cdot (r-1) = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Soma da P.G

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_1 \cdot r^{k-1} = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

Soma infinita da P.G ($r < 1$)

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 \cdot r^{k-1} = \frac{a_1}{1 - r}$$