Relações de Recorrência: Método da Substituição

Análise de Algoritmos – Ciência da Computação

Prof. Daniel Saad Nogueira Nunes

IFB – Instituto Federal de Brasília, Campus Taguatinga

Sumário

Sumário

Método da Substituição

Método da Substituição

O método da substituição se baseia em:

1. "Chutar" a forma da solução;
2. Verificar que o chute está correto através da indução matemática e escolhas de constantes apropriada;
3. Ajustar as cotas superiores e inferiores de modo a conseguir uma cota justa;

Método da Substituição

Exemplo

Determine uma cota superior para:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n, & n > 1 \end{cases}$$

1. Chute: $T(n) \in O(n \lg n)$. Isto é: $T(n) \leq cn \lg n$;
2. Indução:

$$\begin{array}{rcl} T(n) & \leq & 2(c\lfloor n/2 \rfloor \lg(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ & \leq & cn \lg(n/2) + n \\ & = & cn(\lg(n) - 1) + n \\ & = & cn \lg(n) - cn + n \\ & \leq & cn \lg n \quad \diamond c \geq 1 \end{array}$$

Método da Substituição

Exemplo

- Verificação do caso base.

$$1 \not\leq c(1 \lg 1)$$

- A verificação do caso base falhou.
- Como estamos realizando uma análise assintótica, não precisamos provar para $n_0 = 1$, só precisamos mostrar que a indução vale para todo $n \geq n_0$ suficientemente grande. Vamos mostrar que a propriedade vale para todo $n \geq n_0 > 1$.

Método da Substituição

Exemplo

- Verificação do caso base quando $n_0 > 1$.
- Pela natureza da recorrência, qualquer valor de $n > 1$ passará por $T(2)$ ou $T(3)$ nas chamadas recursivas. Vamos verificar que a propriedade vale para $T(2)$ e $T(3)$

$$T(2) = 2T(1) + 2 \leq c2 \lg 2, \quad \diamond\, c \geq 2$$
$$T(3) = 2T(1) + 3 \leq c3 \lg 3, \quad \diamond\, c \geq 2$$

- Mostramos que a indução funciona para todo $n > 1$ com a constante $c \geq 2$ escolhida.

Método da Substituição

Exercício

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n, & n > 1 \end{cases}$$

- Será que $\Theta(n \lg n)$ é uma cota justa? Ajuste!

Método da Substituição

Método da Substituição

- Como dar um bom chute? Experiência. Muitas relações de recorrência são similares:

$$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n$$

- Pisos e tetos não são importantes na maioria das vezes e não afetam o comportamento assintótico da recorrência. Por isso, muitas das vezes, as relações de recorrência, em uma primeira análise, são expressas sem pisos e tetos. Caso valha a pena, fazemos uma análise mais minuciosa posteriormente.
- O mesmo pode ser dito do caso base.

Método da Substituição

Método da Substituição

- Ajuste das cotas: Podemos superestimar cotas superiores e subestimar cotas inferiores e ir ajustando progressivamente para deixá-las justas. Exemplo: $O(n^2)$ e $\Omega(n)$ para a recorrência:

$$T(n) = 2T(n/2 + 17) + n$$

Sumário

Método da Substituição

Reforçando a Hipótese de Indução

- Muitas das vezes, nosso chute pode estar correto, mas mesmo assim, não obtemos a resposta na indução matemática.
- Neste casos, podemos reforçar nossa hipótese de indução em uma mais difícil, mas que acaba facilitando a demonstração.

Método da Substituição

Exemplo

Ache uma cote superior para:

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

Chute: $T(n) \leq cn$:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2(cn/2) + 1 \\ &= cn + 1 \\ &\not\leq cn \end{aligned}$$

Método da Substituição

Exemplo

Ache uma cote superior para:

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

A conta não fecha, apesar do chute inicial estar correto! Vamos reforçar a hipótese de indução: $T(n) \leq cn - b$.

Método da Substituição

Exemplo

Ache uma cote superior para:

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

Chute: $T(n) \leq cn - b$:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2(cn/2 - b) + 1 \\ &= cn - 2b + 1 \\ &\leq cn - b \quad \diamond\ \forall n > n_0 \text{ suficientemente grande} \wedge b \geq 1 \end{aligned}$$

Sumário

Método da Substituição

Mudança de Variáveis

- Para simplificar a resolução de recorrências, podemos fazer mudanças de variáveis.

Método da Substituição

Exemplo

Ache uma cota superior para:

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \lg n$$

Defina $m := \lg n$.

$$T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m$$

Defina $S(m) = T(2^m)$.

$$S(m) = 2S(m/2) + m$$

Sabemos que $S(m) \in O(m \lg m)$. Trocando de volta as variáveis, temos: $S(m) \in O(m \lg m) = O(\lg n \lg \lg n)$.

Sumário

Árvores de recursão

- O método da substituição fornece uma forma simples de demonstrar cotas superiores e inferiores para relações de recorrência.
- Contudo, para podermos utilizar este método, precisamos de uma estimativa, um chute de uma cota justa.
- Pode ser difícil dar uma boa estimativa.
- Para obtê-la, podemos utilizar um mecanismo conhecido como **árvore de recursão**.

Árvore de recursão

- Árvores de recursão são utilizadas para obter uma estimativa para a cota superior ou inferior para então aplicarmos o método da substituição.
- Como o interesse é gerar uma estimativa, podemos ser um pouco mais grosseiros com relação a certos cálculos, já que a estimativa será verificada formalmente em um momento posterior.

Árvore de recursão

Exemplo

Determine uma boa estimativa de cota superior para a relação de recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ 3T(n/4) + \Theta(n^2), & n > 1 \end{cases}$$

Árvore de recursão

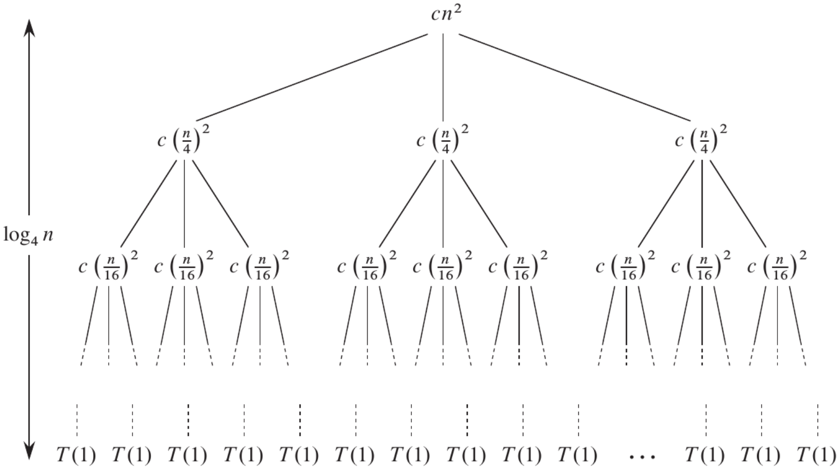
- A ideia aqui é gerar uma árvore em que cada nó interno represente o custo de cada subproblema.
- O custo por nível da árvore corresponde à soma dos custos dos subproblemas daquele nível.
- O custo total por sua vez corresponde à soma dos custos de todos os níveis da árvore.

Árvore de recursão

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ 3T(n/4) + \Theta(n^2), & n > 1 \end{cases}$$

- Como a ideia é obter uma estimativa apenas, vamos assumir que n é potência de 4.
- Vamos tentar obter primeiro uma estimativa para cota superior.
- Cada problema (nó) terá custo de uma função em $\Theta(n^2) \leq cn^2$.
- Além disso, cada problema gerará 3 subproblemas de tamanho $\frac{1}{4}$ do original.
- Como n é dividido por 4 a cada nível, a árvore terá altura $\log_4 n$.

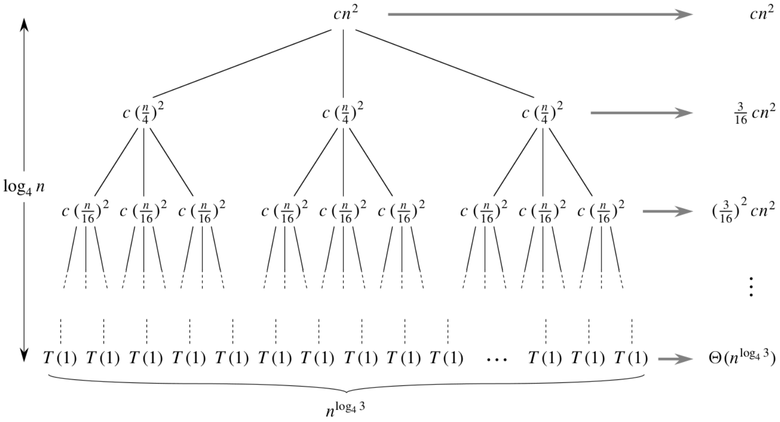
Árvore de recursão



Árvore de recursão

- O número de folhas de uma árvore de grau 3 perfeita é 3^h, em que h é sua altura. Como $h = \log_4 n$, temos que o número de folhas é $3^{log_4 n} = n^{\log_4 3}$. Como cada folha tem custo $\Theta(1)$, o custo total deste nível é $\Theta(n^{\log_4 3})$.
- O custo de cada um dos demais níveis por sua vez é: $(\frac{3cn}{16})^2$.

Árvore de recursão



Árvore de recursão

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{\log_4 n} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) && \diamond\ (3^{\log_4 n}) \text{ folhas} \\
&< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{1}{1-\left(\frac{3}{16}\right)} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) && \diamond\ \text{Soma da PG} \\
&= \frac{16}{13} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \in O(n^2)
\end{aligned}
$$

Árvore de recursão

- Determinamos que uma boa estimativa para cota superior é $O(n^2)$.
- Só precisamos agora usar essa estimativa para provar o que queremos via método da substituição.

Árvore de recursão

1. Chute: $T(n) \in O(n^2)$. Isto é: $T(n) \leq cn^2$;
2. Indução:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 3c(n/4)^2 + dn^2 \\ &\leq \frac{3cn^2}{16} + dn^2 \\ &\leq cn^2 \qquad \diamond\, c \geq \frac{16d}{13} \end{aligned}$$

Árvore de recursão

- Como a relação de recorrência já possui um termo $\Theta(n^2)$ na sua forma geral, não precisamos provar a cota inferior, visto que o custo já tem que ser no mínimo $\Omega(n^2)$.
- Provamos a cota justa de $\Theta(n^2)$.