

NP-Compleitude: Tratamento

Análise de Algoritmos – Ciência da Computação



Prof. Daniel Saad Nogueira
Nunes

Instituto Federal de Brasília, Câmpus
Taguatinga



Sumário

1 Introdução



Tratamento de Problemas $\mathcal{NP}$

- A literatura denomina os problemas que estão em $\mathcal{NP}$ como intratáveis.
- Na prática não é bem assim ...
- Mesmo se um problema for $\mathcal{NPC}$ ainda há esperança.



Tratamento de Problemas $\mathcal{NP}$

- Se a entrada for suficientemente pequena, algoritmos força-bruta podem fornecer uma resposta exata em tempo hábil.
- Casos específicas de problemas $\mathcal{NP}$ podem ser resolvidas em tempo polinomial.
 - ▶ Maior caminho em DAGs.
 - ▶ Coloração de vértices quando há apenas duas cores.
- Algoritmos heurísticos: utilizam técnicas heurísticas que sacrificam a qualidade de resposta em prol de uma complexidade menor. Geralmente não garantem uma distância mínima da solução ótima.
- Algoritmos aproximados: possuem uma complexidade viável e garantem uma qualidade da resposta próxima da ideal.
- Focaremos em Algoritmos Aproximados.



Sumário

2 Algoritmos Aproximados



Sumário

- 2 Algoritmos Aproximados
 - Conceitos Preliminares
 - Algoritmos Aproximados



Parâmetros de Aproximação

Definição (Parâmetro de Aproximação)

Dizemos que um algoritmo para um determinado problema possui um parâmetro de aproximação ρ se, para qualquer entrada de tamanho n , o custo C produzido pela solução está a um fator $\rho(n)$ do custo C^* da solução ótima.

Chamamos o algoritmo de $\rho(n)$ -algoritmo de aproximação.



Parâmetros de Aproximação

- Matematicamente, a definição anterior pode ser expressa como:

$$\max \left\{ \frac{C}{C^*}, \frac{C^*}{C} \right\} \leq \rho(n)$$

- Funciona independentemente do problema ser de maximização ou minimização.
- Note que um algoritmo exato de acordo com esta definição sempre possui parâmetro de aproximação igual a 1.
- Temos $1 \leq \rho(n)$.



Algoritmos Aproximados

- Veremos agora alguns problemas em $\mathcal{NP}$ que admitem um $\rho(n)$ -algoritmo de aproximação.



Sumário

- 2 Algoritmos Aproximados
 - Conceitos Preliminares
 - Algoritmos Aproximados



Cobertura de Vértices

- Vimos anteriormente que o problema da Cobertura de Vértices (VC) consiste em encontrar um conjunto $V' \subseteq V$, tal que $|V'| \leq k$ e toda aresta incide nos vértices da cobertura.
- O problema de otimização correspondente, VC-OPTM, consiste em encontrar a cobertura mínima, ou seja, aquela com o menor número de vértices possível.



Cobertura de Vértices

- Sabemos da dificuldade do problema, já que VC está em $\mathcal{NP}$. Assim VC-OPT é pelo menos tão difícil quanto.
- Atacaremos ele utilizando um algoritmo aproximado.



VC-OPTM: Algoritmo Aproximado

Algorithm 1: APPROX-VERTEX-COVER(G)

Input: G

Output: Cobertura aproximada de G

```
1  $C \leftarrow \emptyset$ 
2  $E' \leftarrow G.E$ 
3 while  $E' \neq \emptyset$  do
    // Escolha de uma aresta arbitrária
    Seja  $(u, v)$  uma aresta arbitrária de  $E'$ 
    // Inserção de  $u$  e  $v$  na cobertura aproximada
    5  $C \leftarrow C \cup \{u\} \cup \{v\}$ 
    // Remoção de todas as arestas incidentes nos nós
    //    incluídos na cobertura
    6 Remova de  $E'$  todas as arestas incidentes em  $u$  ou  $v$ 
    // Retorna a cobertura aproximada
7 return  $C$ 
```



VC-OPTM: Algoritmo Aproximado

- Claramente o algoritmo leva tempo $O(|V|^2)$ se utilizada uma matriz de adjacências.
- Mostraremos agora que o algoritmo é de fato um 2-algoritmo de aproximação.



VC-OPTM: Algoritmo Aproximado

Theorem

APPROX-VERTEX-COVER é *um 2-algoritmo de aproximação de tempo polinomial.*



VC-OPTM: Algoritmo Aproximado

Demonstração

O conjunto C retornado pelo algoritmo certamente é uma cobertura, uma vez que o algoritmo prossegue até remover todas as arestas de $G.E$ e portanto, todas estão cobertas por C .

Olhemos para a escolha das arestas feita na linha 4 do algoritmo. Seja A o conjunto de arestas escolhido pelo algoritmo. Uma cobertura ótima C^* precisa incluir pelo menos uma das extremidades de cada $e \in A$.

Além disso, podemos concluir que nenhum vértice de uma extremidade de $e \in A$ se liga a outro vértice que está em uma das extremidades de $e' \in A$, devido à linha 6 do algoritmo.



VC-OPTM: Algoritmo Aproximado

Demonstração

Conseguimos concluir então que:

$$|C^*| \geq |A|$$

Ao mesmo tempo, cada execução da linha 5 pega as duas extremidades de cada aresta de A , logo podemos concluir que:

$$C = 2|A|$$



VC-OPTM: Algoritmo Aproximado

Demonstração

Combinando as duas desigualdades, temos:

$$\begin{aligned}|C| &= 2|A| \\ &\leq 2|C^*|\end{aligned}$$





Caixeiro Viajante

Definição (TSP-OPTM)

A versão de otimização do problema do Caixeiro Viajante (TSP) consiste em, dado um grafo $G = (V, E)$ com uma função $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, determinar um ciclo hamiltoniano G de menor custo, ou seja, um ciclo que visita cada cidade apenas uma vez e volta na cidade original com menor custo possível.

- **Entrada:** $G = (V, E)$.
- **Saída:** o valor do ciclo hamiltoniano com menor custo possível.



Caixeiro Viajante

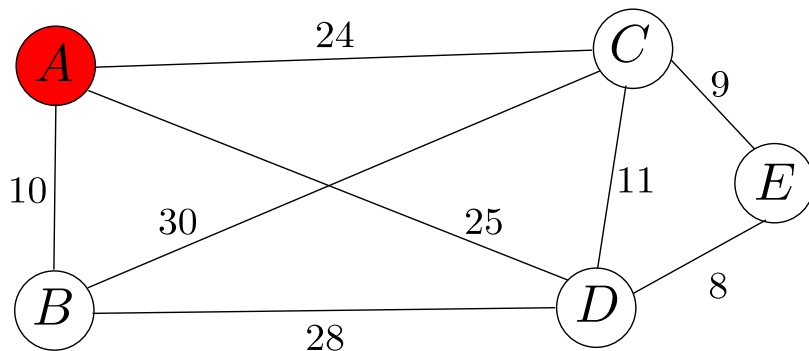
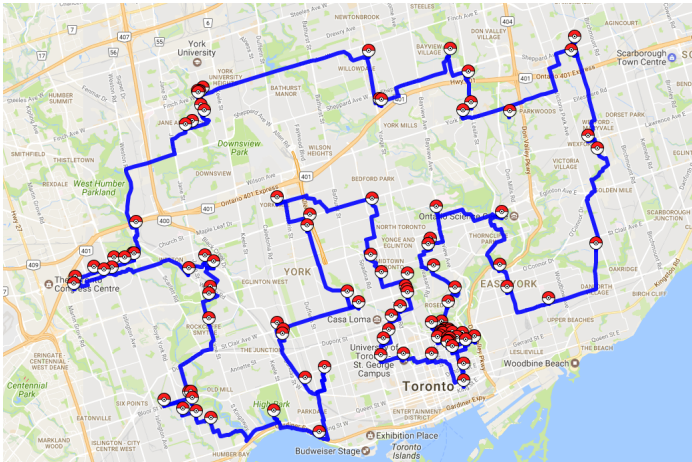


Figura: Qual a resposta?

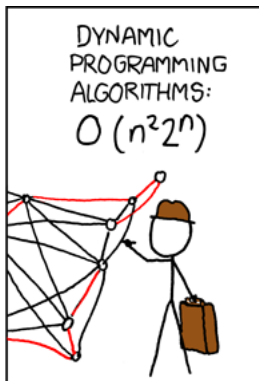
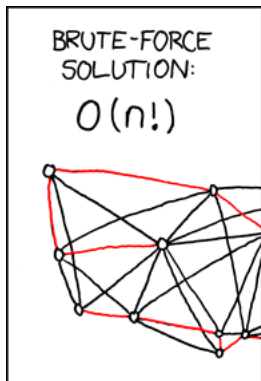


Caixeiro Viajante





Caixeiro Viajante





Caixeiro Viajante

- Este é um problema difícil, uma vez que a versão de decisão do problema, TSP, está em $\mathcal{NP}$.
- Como atacá-lo através de algoritmos aproximados?
- De fato, apenas a versão do TSP-OPTM que obedece a desigualdade triangular possui soluções aproximadas conhecidas.



Desigualdade Triangular

Definição (Desigualdade Triangular para Grafos)

Uma função de custo c satisfaz a desigualdade triangular quando, para quaisquer vértices $u, v, w \in V$, temos:

$$c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$$

Ou seja, não é mais custoso ir diretamente a um outro nó do que tentar pegar um atalho através de um terceiro.



Desigualdade Triangular

- Apesar de limitar a apenas grafos que obedecem a desigualdade triangular, vários grafos em problemas reais possuem esta propriedade.
- A distância euclidiana satisfaz a propriedade de distância triangular, logo qualquer grafo que seja modelado como pontos em um plano cartesiano também possui tal propriedade.



TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

- Mostraremos agora como projetar um algoritmo com parâmetro de aproximação 2 para TSP-OPTM.



TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

Algorithm 2: APPROX-TSP-TOUR(G, c, r)

Input: G, c, r

Output: Solução aproximada para TSP

// Computa a árvore geradora mínima de G com raiz em r

1 $T \leftarrow \text{MINIMUM-SPANNING-TREE}(G, c, r)$

// Executa a busca pré-ordem em T e retorna a lista dos nós

2 $H \leftarrow \text{PREORDER}(T, r)$

// Remove nós duplicados do passeio

3 $\text{REMOVE-DUPLICATE}(H)$

// Retorna o ciclo hamiltoniano

4 **return** (H)



TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

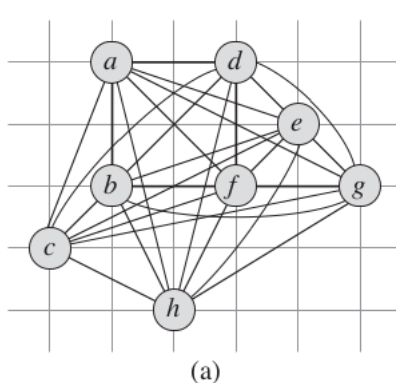


Figura: Grafo Original.



TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

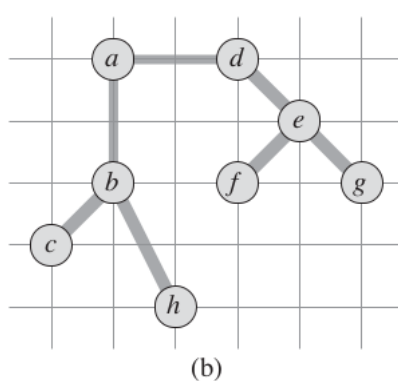


Figura: Árvore Espalhada Mínima.



TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

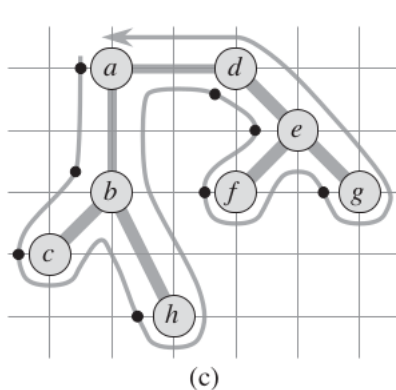


Figura: Percurso em Pré-Ordem.



TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

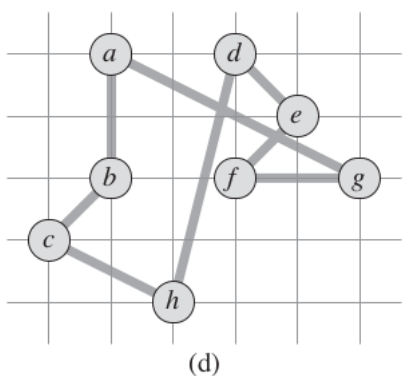


Figura: Obtenção do Circuito Hamiltoniano.



TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

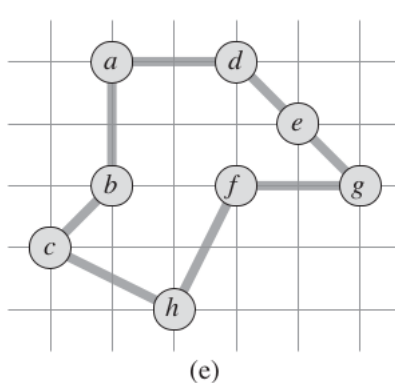


Figura: Solução Ótima.



TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

Theorem

APPROX-TSP-TOUR é um 2-algoritmo de aproximação para o TSP-OPTM para grafos que obedecem a desigualdade triangular.



TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

Demonstração

Primeiramente, é fácil ver que o algoritmo APPROX-TSP-TOUR executa em tempo polinomial dominado pela construção da árvore geradora mínima.

Precisamos mostrar agora que a solução obtida está no máximo a um fator de 2 da solução ótima.



TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

Demonstração

Seja $c(T)$ o custo da árvore geradora mínima obtida e $c(H^*)$ a melhor resposta possível. Claramente temos:

$$c(T) \leq c(H^*)$$



TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

Demonstração

Durante o percurso em T , foi obtido uma lista de vértices W que representa o passeio na árvore geradora mínima. Claramente, como o passeio atravessa cada aresta duas vezes, temos:

$$c(W) = 2c(T)$$

Logo:

$$c(W) \leq 2c(H^*)$$



TSP-OPTM: Algoritmo Aproximado

Demonstração

No entanto, o passeio não necessariamente corresponde a um ciclo Hamiltoniano. Ao desprezar os nós repetidos no passeio e utilizando a desigualdade triangular, podemos obter um ciclo hamiltoniano H , que com certeza possui:

$$c(H) \leq C(W)$$

Observando as desigualdades, é fácil concluir que:

$$c(H) \leq 2c(H^*)$$

